

Das Wallman-Verfahren

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Joachim Schröder

aus Berlin

1976



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Das

Wallman - Verfahren

von

Joachim Schröder

1. Referent: Professor Dr. Gerhard Preuß
2. Referent: Professor Dr. Helmuth Pachale



Tag der mündlichen Prüfung: 18. Juni 1976

Inhaltsverzeichnis

	Vorwort	2
	Übersicht	3
I	Vorbereitungen	9
II	Die Einbettung von X in $m_0(X, \underline{R})$	15
III	Bedingungen für die Wallman-Kompaktifizierbarkeit	19
IV	Konstruktionen der Wallman-Kompaktifizierung	29
V	Fortsetzung stetiger Funktionen	43
VI	Ergebnisse	52
	Literaturverzeichnis	61

Vorwort

Der Begriff der Kompaktheit zählt zu den bedeutungsvollsten Begriffen in der Theorie der topologischen Räume. Nachdem Tychonoff 1930 die topologischen Räume bestimmte, die eine kompakte Hülle besitzen, stellte sich bald die Aufgabe, einen Überblick über alle Kompaktifizierungen eines vollständig regulären Raumes zu gewinnen. 1938 konstruierte Wallman eine Kompaktifizierung nach einer Methode, die hoffen läßt, daß es ein mengentheoretisches Verfahren gibt, um diese topologische Aufgabe zu lösen. Dieses Konstruktionsprinzip hat der vorliegenden Arbeit den Namen gegeben. Damit soll angedeutet werden, daß wir uns nicht nur mit dem eng umrissenen Problem der Wallman-Kompaktifizierbarkeit befassen wollen, sondern nach allgemeineren Anwendungsmöglichkeiten dieses Verfahrens suchen. Und so erhalten wir mitunter auch Ergebnisse, die für die ganze allgemeine Topologie von Bedeutung sind. Nähere Informationen und Überblick kann der Leser der 'Übersicht' entnehmen. Dort sind auch die nötigen Literaturhinweise enthalten, auf die im Text vollkommen verzichtet wurde. Beweise, die in der Literatur zu finden sind, werden grundsätzlich dem Leser überlassen.

Berlin, März 1976

J. Schöley

Übersicht

Kapitel I

In diesem Kapitel wird die Einführung des Wallman-Raumes $\mathcal{M}_0(X, \mathcal{A})$ und seiner Wallman-Topologie auf sehr allgemeine Art vorgenommen. Dadurch sollte die Zwangsläufigkeit der Entwicklung, die zur Definition von $\mathcal{M}_0(X, \mathcal{A})$ führt, gezeigt werden. Die Ergebnisse sind Verallgemeinerungen von Resultaten aus Arbeiten von Brooks (1967) und Steiner (1968). So steht I.8. in Steiner (1968), jedoch haben wir uns hier von der Voraussetzung befreit, daß X topologischer Raum ist und $\mathcal{A}$ aus abgeschlossenen Mengen besteht. Der wichtige Satz I.10., der die Beziehung der Wallman-Topologie zur Stone-Topologie auf der Menge aller maximalen Ideale eines kommutativen unitären Ringes zeigt, steht andeutungsweise bei Brooks (1967, Theorem 2.4.) und gehört zum Allgemeinwissen. Der Nachweis von a), b), c) und d) erübrigt sich, wenn zuerst gezeigt wird, daß $*$ die gleiche Topologie wie $C\mathcal{A}$ liefert. Jedoch gibt dies keinen Einblick in die Struktur von $\mathcal{M}_0(X, \mathcal{A})$.

Kapitel II

Dieses Kapitel enthält die wichtigsten Ergebnisse über die Beziehungen, in denen X zu $\mathcal{M}(X, \mathcal{R})$ steht. Es wurden im wesentlichen Ergebnisse von Steiner (1968) und Brooks (1967) verwertet. II.10 und II.11. gehen auf die grundlegende Arbeit von Frink (1964) zurück. II.12., II.13. und II.14. sind neu und kennzeichnen reguläre Ringe, deren Eigenschaften gewissermaßen zwischen "separiert-disjunktiv" und "normal" liegen. Anregung war hierbei eine Arbeit von Hajek (1973). Übrigens zeigt II.9.b), daß ein topologischer Raum (nicht notwendig T_1) mit einem separierten disjunktiven Ring stets ein P_0 -Raum ist (d.h. seine T_C -Reflexion ist ein T_1 -Raum). II.9.b) ist auch der Grund für die verträglichen Eigenschaften von $\mathcal{P}$, die in II.5. aufgezählt wurden.

Kapitel III

Im Kapitel III haben wir theoretische Überlegungen über die Wallman-Kompaktifizierbarkeit angestellt. "Theoretisch" - das soll heißen es wurde nicht die Wallman-Kompaktifizierbarkeit spezieller Kompaktifizierungen untersucht, wie z.B. Alexandroff- und Stone-Čech-Kompaktifizierung, metrische Kompaktifizierungen, usw.. Die gewonnenen Ergebnisse sollen uns gerade in diesen speziellen Fällen später behilflich sein. III.2. stammt von Steiner & Steiner (1968C).

Die Aussage in III.5. geht auf Steiner (1968) zurück, die ursprüngliche Fassung findet man in III.6.. Der Beweis konnte hier vereinfacht werden. III.8., III.11. und III.13.-15. rühren von Biles (1970) her. III.9. ist neu, Anregung war die Arbeit von Brooks (1970). Es ist im allgemeinen nicht gleichgültig, in welcher Richtung der Homöomorphismus konstruiert wird (vgl. auch III.12.). Es wurde hier auch nicht zwischen der eindimensionalen Menge und ihrem Element unterschieden, was aber nicht zu Mißverständnissen führen wird. III.12. verallgemeinert einen bekannten Eindeutigkeitssatz auf allgemeine Ringe R . III.16. stammt von Alo & Shapiro (1968B), jedoch haben wir den Beweis mit unserem Theorem III.9. geführt. III.18. ist ein Ergebnis von Gagrut & Naimpally (1973), sie benutzen im Beweis allerdings Proximitäten. III. 19. steht in Steiner & Steiner (1968C). III.20. ist eine Erkenntnis von Šapiro (1974), es gelang aber seinen unnötig komplizierten und umständlichen Beweis erheblich zu vereinfachen.

Kapitel IV

Daß in IV.1.a) angesprochene Wallman-Basis-Problem wurde von Prink (1964) formuliert und hat inzwischen eine lange Geschichte. IV.2. stammt von Steiner & Steiner (1968B). IV.3. findet sich in der § -Formulierung bei Gagrut & Naimpally (1973). Darauf wird in IV.4.a) eingegangen.

Die Formulierung mit τ -Umgebung ist neu. Die Definition von $pU_1) - pU_7)$ kann der Leser dem Buch von Preuß (1972) entnehmen. Die Idee, das Wallman-Verfahren mit der Theorie der Proximitätsräume in Verbindung zu bringen, hatte Njastad (1966). Für diese und die folgenden Sätze ist die Kenntnis des Buches von Mainpally & Warrack (1970) von Vorteil. IV.5., IV.6., IV.7. stammen von Njastad (1966). IV.8. wird beiläufig schon bei Njastad (1966) erwähnt, aber erst von Gagrut & Mainpally (1973) hervorgehoben. Der Beweis durch Verwendung von Büscheln ist neu. IV.9. ist der Ausgangspunkt einer Reihe von Ergebnissen, die nicht nur im Rahmen des Wallman-Verfahrens von Interesse sind, sondern allgemein in der Mengentheoretischen Topologie Bedeutung haben. Eine sehr gute Darstellung der Theorie inverser Zerlegungsspektren findet sich bei Flachsmeyer (1961), eine gute bei Nagata (1974). Die Lektüre ist für das Verständnis notwendig, wir folgen der Sprechweise von Flachsmeyer (1961). IV.10., IV.11., IV.12., IV.13., IV.15., IV.16. sind neu. IV.17. verallgemeinert ein Ergebnis von Flachsmeyer (1961) auf beliebige Ringe E. IV.15. vereinigt zwei alte Erzeugungsverfahren der Allgemeinen Topologie. Das eine geht auf Wallman (1938) zurück, das andere beginnt mit der Einführung der Projektiven Räume durch Alexandroff im Jahre 1928. Im Beweis des bekannten Satzes IV.18. ist es nun möglich, starke Vereinfachungen vorzunehmen. IV.19. zählt zu den über-

raschesten und seltsamsten Sätzen der Allgemeinen Topologie und stammt von Alexandroff & Urysohn aus dem Jahre 1929. Der Beweis zeigt, daß die übliche Benutzung inverser Limites vermieden werden kann. Selbst der in IV.10. eingeführte Raum $\mathcal{R}(X, \underline{P})$ ist nicht nötig.

$\mathcal{R}(X, Z(X))$ scheint übrigens ein geeignetes Werkzeug zu sein, die Primideale in $C(X)$ zu untersuchen. Jeder Z -Primfilter ist in genau einem Z -Ultrafilter enthalten. Wir erhalten so auf naheliegender Weise eine Partition von $\mathcal{R}(X, Z(X))$. Betrachten wir die Ordnungsrelation " $\leq$ " auf $\mathcal{R}(X, Z(X))$, die durch $\underline{u} \leq \underline{v} \Leftrightarrow \underline{u} \in \overline{\{\underline{v}\}}$ definiert wird. Ist X F -Raum, so zerfällt $\mathcal{R}(X, Z(X))$ in Ketten, an deren Anfang ein Z -Ultrafilter steht. Ist X F -Raum, dann schrumpfen diese Ketten zu einem Punkt zusammen (jedes Primideal ist maximales Ideal). Es gilt $\mathcal{R}(X, Z(X)) = \mathfrak{m}(X, Z(X))$. Man vgl. dazu Gillman & Jerison (1960).

Kapitel V

Die in V.1. aufgeführten Ergebnisse können den im Literaturverzeichnis angeführten Lehrbüchern entnommen werden. V.2. wird hier zum erstenmal formuliert, obwohl es eigentlich schon von Frink (1964) benötigt wird. Das gleiche gilt für V.5.. Man beachte die Beziehung zu IV.2.. V.4. und V.8. sind neu und, wie die Beweise zeigen, Anwendungen bekannter Fortsetzungssätze. Spezielle Resultate dieser Art (für die Freudenthal- und Fan-Gottesman Kompaktifizierung) wurden schon von Hunsaker & Naimpally

(1975) gewonnen. V.6. wird von Njastad (1966) formuliert und hier bewiesen. Der in V.7. erwähnte Satz geht auf A.D. Taimanov zurück und wurde schon in IV.19. benötigt. V.9., V.10., V.11., V.12., V.13. sind Verallgemeinerungen von Ergebnissen und Definitionen von Harris (1971). Äquivalente Formulierungen finden sich bei Bentley & Raimpally (1974).

Kapitel VI

VI.1., VI.2. und VI.4. stammen von Steiner (1968). VI.5. und VI.6. sind neu. VI.7. geht im wesentlichen auf Njastad (1966) zurück. VI.8. ist neu und eine Weiterentwicklung der Arbeiten Njastads (1966) und Brooks' (1967). Das Ergebnis von Brooks erhalten wir als Korollar VI.9.. VI.10. läßt sich sogar ohne Voraussetzung der Lokalkompaktheit von X beweisen, vgl. Steiner & Steiner (1968C). VI.11. war schon Gillman & Jerison (1960) bekannt. VI.13., VI.14., VI.15. und VI.17. gehen auf Njastad (1966) zurück, jedoch haben wir in den Beweisen keine Proximitäten benutzt. VI.16. und VI.18. sind neu. VI.18. ist Verschärfung eines Satzes von Steiner & Steiner (1968C), deren Resultat wir als Korollar VI.20. erhalten. Es könnten noch zahlreiche Ergebnisse ähnlicher Art angeführt werden. Hinweise findet der Leser im Literaturverzeichnis.

1. Vorbereitungen

I.1. Definition :

Sei X Menge und $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$. Sei $\mathcal{E}(X, \mathcal{A})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathcal{A}$ mit endlicher Durchschnittseigenschaft. Sei $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ die Menge aller bzgl. der Inklusion maximalen Elemente von $\mathcal{E}(X, \mathcal{A})$.

I.2. Lemma :

Sei $\underline{E} \in \mathcal{E}(X, \mathcal{A})$, dann gibt es ein $\underline{U} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ mit $\underline{E} \subseteq \underline{U}$.

Beweis: Lemma von Zorn. $\square$

I.3. Lemma :

Sei $\underline{E} \in \mathcal{E}(X, \mathcal{A})$. Dann sind äquivalent :

a) $\underline{E}$ ist maximal.

b) Ist $A \in \mathcal{A}$ und gilt $A \cap E_1 \cap \dots \cap E_n \neq \emptyset$ für alle endlich vielen $E_1, \dots, E_n \in \underline{E}$, dann folgt $A \in \underline{E}$.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $A \cap E_1 \cap \dots \cap E_n \neq \emptyset$ für alle endlich vielen $E_1, \dots, E_n \in \underline{E}$. Angenommen $A \notin \underline{E}$. Dann hat $\{A\} \cup \underline{E}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Es ist $\underline{E} \subsetneq \underline{E} \cup \{A\}$, wegen $\underline{E} \neq \underline{E} \cup \{A\}$ folgt ein Widerspruch zur Maximalität von $\underline{E}$.

b) $\Rightarrow$ a): Angenommen $\underline{E}$ ist nicht maximal. Dann gibt es nach I.2. ein $\underline{U} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ mit $\underline{U} \supsetneq \underline{E}$. Sei $A \in \underline{U} - \underline{E}$. Dann gilt aber wegen $\underline{E} \subseteq \underline{U}$ für alle endlich vie-

len $E_1, \dots, E_n \in \underline{E}$ $A \cap E_1 \cap \dots \cap E_n \neq \emptyset$. Es folgt $A \in \underline{E}$. Widerspruch! , qed

I.4. Lemma :

Sei $\underline{U}, \underline{U}' \in \mathcal{MO}(X, \mathcal{O})$ und $A, B \in \mathcal{O}$.

a) Ist $A \cup B \in \underline{U}$, dann folgt $A \in \underline{U}$ oder $B \in \underline{U}$.

b) Ist $A \subseteq B$ und $A \in \underline{U}$, dann folgt $B \in \underline{U}$.

c) $\underline{U} \neq \underline{U}'$ gilt genau dann, wenn $U_1, \dots, U_n \in \underline{U}$, $U'_1, \dots, U'_m \in \underline{U}'$ existieren mit $U_1 \cap \dots \cap U_n \cap U'_1 \cap \dots \cap U'_m = \emptyset$.

Beweis : a) Sei $A, B \in \mathcal{O}$ und $A \cup B \in \underline{U} \in \mathcal{MO}(X, \mathcal{O})$. Angenommen $A \notin \underline{U}$ und $B \notin \underline{U}$. Nach I.3. gibt es $D_1, \dots, D_n, E_1, \dots, E_m \in \underline{U}$ mit $A \cap D_1 \cap \dots \cap D_n = \emptyset$ und $B \cap E_1 \cap \dots \cap E_m = \emptyset$. Es folgt $(A \cup B) \cap D_1 \cap \dots \cap D_n \cap E_1 \cap \dots \cap E_m = \emptyset$, also $A \cup B \notin \underline{U}$. Widerspruch!

b) Da $U_1 \cap \dots \cap U_n \cap A \neq \emptyset$ gilt für jeweils endlich viele $U_1, \dots, U_n \in \underline{U}$ folgt wegen $B \supseteq A$ auch $U_1 \cap \dots \cap U_n \cap B \neq \emptyset$. Wegen I.3. muß $B \in \underline{U}$ sein.

c) Eine Fichtung ist trivial. Ist $\underline{U} \neq \underline{U}'$, so existiert c. B. d. A. $U \in \underline{U} - \underline{U}'$. Wegen I.3. folgt die Existenz von $U'_1, \dots, U'_n \in \underline{U}'$ mit $U'_1 \cap \dots \cap U'_n \cap U = \emptyset$. qed

I.5. Lemma :

Sei $A \in \mathcal{O}$ und $C(A) = \{ \underline{U} \mid \underline{U} \in \mathcal{MO}(X, \mathcal{O}) \text{ und } A \in \underline{U} \}$

Sei $C\mathcal{O} = \{ C(A) \mid A \in \mathcal{O} \}$. Dann ist $C\mathcal{O}$ Subbasis ab-

geschlossener Mengen auf $\mathcal{M}(X, \mathcal{O})$ und definiert eine quasikompakte Topologie auf $\mathcal{M}(X, \mathcal{O})$.

Beweis : $C \mathcal{O}$ ist natürlich Subbasis abgeschlossener Mengen.

Wir benutzen nun den Subbasis-Satz von Alexander. Sei $(C(A_i))_{i \in I}$

eine Familie mit endlicher Durchschnittseigenschaft. Ist $\underline{H} \in$

$C(A_{i_1}) \cap \dots \cap C(A_{i_n})$, so ist $A_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \underline{H}$, also

$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} \neq \emptyset$. $(A_i)_{i \in I}$ hat mithin die endliche Durch-

schnittseigenschaft. Nach I.2. gibt es $\underline{U} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{O})$

mit $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \underline{U}$. Dann folgt $\underline{U} \in \bigcap_{i \in I} C(A_i)$. qed

I.6. Satz :

Sei $A, B \in \mathcal{O}$. a) Ist $A \subseteq B$, dann folgt $C(A) \subseteq C(B)$.

b) Ist $A \cup B \in \mathcal{O}$, dann gilt $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$.

c) Ist $A \cap B \in \mathcal{O}$, dann gilt $C(A \cap B) = C(A) \cap C(B)$.

Beweis : a): Sei $A \subseteq B$ und $\underline{U} \in C(A)$, also $A \in \underline{U}$. Nach

I.4. ist auch $B \in \underline{U}$, d.h. $\underline{U} \in C(B)$.

b): $\underline{U} \in C(A \cup B) \Leftrightarrow A \cup B \in \underline{U} \Leftrightarrow$ (wegen I.4.)

$A \in \underline{U} \vee B \in \underline{U} \Leftrightarrow \underline{U} \in C(A) \cup C(B)$.

c): Wegen a) ist $C(A \cap B) \subseteq C(A) \cap C(B)$. Sei $\underline{U} \in C(A) \cap C(B)$, also $A \in \underline{U}$, $B \in \underline{U}$. Wegen I.3. und $A \cap B \in \mathcal{O}$ folgt $A \cap B \in \underline{U}$, d.h. $\underline{U} \in C(A \cap B)$. qed

I.7. Bemerkung : a) Im folgenden verstehen wir $\mathcal{M}(X, \mathcal{O})$

stets mit der in I.5. eingeführten Topologie.

b) $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$ erzeugt einen Mengenring $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. Er besteht aus allen endlichen Vereinigungen von endlichen Schnitten von Elementen aus $\mathcal{A}$. Es ist dann auch $\emptyset, X \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$.

1.8. Satz :

Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ der von $\mathcal{A}$ erzeugte Ring.

Dann gilt $\mathcal{M}(X, \mathcal{A}) \cong \mathcal{M}(X, \mathcal{R}_{\mathcal{A}})$.

Beweis: Wir definieren zuerst eine bijektive Abbildung

$f : \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{M}(X, \mathcal{R}_{\mathcal{A}})$. Ist $\underline{U} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$,

dann gibt es, da $\underline{U}$ die endliche Durchschnittseigenschaft

besitzt, ein $\underline{U}_{\mathcal{R}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{R}_{\mathcal{A}})$ mit $\underline{U}_{\mathcal{R}} \supseteq \underline{U}$. $\underline{U}_{\mathcal{R}}$ ist eindeutig

bestimmt: Angenommen es gibt $\underline{U}'_{\mathcal{R}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{R}_{\mathcal{A}})$ mit $\underline{U}'_{\mathcal{R}} \neq \underline{U}_{\mathcal{R}}$.

Dann existiert nach 1.4. $A \in \underline{U}$, $B \in \underline{U}'$ mit $A \cap B = \emptyset$. Es

gilt $A = (A_1^1 \cap \dots \cap A_{n_1}^1) \cup \dots \cup (A_1^m \cap \dots \cap A_{n_m}^m)$ mit $A_i^j \in \mathcal{A}$,

entsprechend läßt sich B darstellen. Wegen 1.4. finden

wir also (nach geeigneter Nummerierung) $A_1 \cap \dots \cap A_n \in$

$\underline{U}_{\mathcal{R}}$, $B_1 \cap \dots \cap B_m \in \underline{U}'_{\mathcal{R}}$ mit $A_1 \cap \dots \cap A_n \subseteq A$, $B_1 \cap \dots \cap$

$B_m \supseteq B$. Mit Hilfe von 1.3. und $\underline{U} \subseteq \underline{U}_{\mathcal{R}}$, $\underline{U} \subseteq \underline{U}'_{\mathcal{R}}$ folgt $A_i \in \underline{U}$,

$B_j \in \underline{U}$. Wegen $A_1 \cap \dots \cap A_n \cap B_1 \cap \dots \cap B_m = \emptyset$ hat $\underline{U}$ dann

nicht die endliche Durchschnittseigenschaft. Somit wird eine

Abbildung $f : \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{M}(X, \mathcal{R}_{\mathcal{A}})$ definiert. Die

Umkehrabbildung wird gegeben durch $f^{-1}(\underline{U}_{\mathcal{R}}) = \underline{U} = \underline{U}_{\mathcal{R}} \cap \mathcal{A}$.

f ist bijektiv: Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt $f[C_{\mathcal{A}}(A)] = \{ \underline{U}_{\mathcal{R}} \mid A \in \underline{U} \}$.

Wegen $A \in \mathcal{A}$ ist aber $A \in \underline{U} \Leftrightarrow A \in \underline{U}_{\mathcal{R}}$. Also folgt $\{ \underline{U}_{\mathcal{R}} \mid A \in \underline{U} \} =$

$= \{ \underline{U}_{\mathcal{R}} \mid \underline{U} \in \mathcal{MO}(X, \mathcal{R}_{\alpha}) \wedge A \in \underline{U}_{\mathcal{R}} \} = \mathcal{C}_{\mathcal{R}_{\alpha}}(A)$. Damit ist f abgeschlossene Abbildung. Sei nun $\underline{U}_{\mathcal{R}} \in C((A_1^1 \wedge \dots \wedge A_{n_1}^1) \vee \dots \vee (A_1^m \wedge \dots \wedge A_{n_m}^m)) = (\text{nach I.6.}) = (C(A_1^1) \wedge \dots \wedge C(A_{n_1}^1)) \vee \dots \vee (C(A_1^m) \wedge \dots \wedge C(A_{n_m}^m))$. Äquivalent dazu ist $\underline{U} \in (C_{\alpha}(A_1^1) \wedge \dots \wedge C_{\alpha}(A_{n_1}^1)) \vee \dots \vee (C_{\alpha}(A_1^m) \wedge \dots \wedge C_{\alpha}(A_{n_m}^m))$. Damit ist f^{-1} abgeschlossene Abbildung. qed

I.9. Bemerkung :

O.B.d.A. sei nun $\mathcal{R}$ stets ein Mengenring. Die Elemente von $\mathcal{MO}(X, \mathcal{R})$ sind dann $\mathcal{R}$ -Ultrafilter. Nach I.7. gilt $\emptyset, X \in \mathcal{R}$.

I.10. Satz :

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{MO}(X, \mathcal{R})$. Dann wird durch $\mathcal{U}^* = \{ \underline{U} \mid \underline{U} \in \mathcal{MO}(X, \mathcal{R}) \text{ und } \underline{U} \supseteq \bigcap \mathcal{U} \}$ ein Hüllenoperator $*$ definiert, der die gleiche Topologie (Kern-Hüllen Topologie) liefert, wie in I.5. eingeführt wurde.

Beweis: Es sind die Kuratowskischen Hüllenaxiome nachzuweisen. a) Wegen $\emptyset \in \mathcal{R}$ gibt es kein $\underline{U} \in \mathcal{MO}(X, \mathcal{R})$ mit $\underline{U} \supseteq \mathcal{R}$. Es folgt $\emptyset^* = \{ \underline{U} \mid \underline{U} \supseteq \bigcap \emptyset \} = \{ \underline{U} \mid \underline{U} \supseteq \mathcal{R} \} = \emptyset$.

b) Trivialerweise ist $\mathcal{U}^* \supseteq \mathcal{U}$.

c) Sei $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subseteq \mathcal{MO}(X, \mathcal{R})$. Es ist $(\mathcal{U} \cup \mathcal{W})^* = \{ \underline{U} \mid \underline{U} \supseteq \bigcap (\mathcal{U} \cup \mathcal{W}) \} = \{ \underline{U} \mid \underline{U} \supseteq \bigcap \mathcal{U} \wedge \bigcap \mathcal{W} \}$. Angenommen $\underline{U} \not\supseteq \bigcap \mathcal{U}$ und $\underline{U} \not\supseteq \bigcap \mathcal{W}$. Dann existiert $A \in \bigcap \mathcal{U}$, $B \in \bigcap \mathcal{W}$ mit $A, B \notin \underline{U}$. Es ist $A \cup B \in \bigcap \mathcal{U} \wedge \bigcap \mathcal{W}$ und damit $A \cup B \in \underline{U}$. Widerspruch zu I.4.. Also $\underline{U} \in \mathcal{U}^*$ oder $\underline{U} \in \mathcal{W}^*$. Wir haben gezeigt $(\mathcal{U} \cup \mathcal{W})^* \subseteq \mathcal{U}^* \cup \mathcal{W}^*$.

$\subseteq \mathcal{W}^* \cup \mathcal{H}^*$. Die umgekehrte Inklusion ist trivial.

d) Sei $\underline{U} \in \mathcal{U}^{**}$, d.h. $\underline{U} \supseteq \bigcap \mathcal{W} = \bigcap \{ \underline{U}' \mid \underline{U}' \supseteq \bigcap \mathcal{W} \}$
 $= \bigcap \mathcal{W}$, also $\underline{U} \supseteq \mathcal{W}^*$. Die umgekehrte Inklusion ist trivial.

* definiert die gleiche Topologie wie $\mathcal{C}\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \underline{U} \in \bigcap_{\mathcal{W} \in \mathcal{C}(A)} \mathcal{C}(A) &\Leftrightarrow \bigwedge_{A \in \mathcal{R}} \mathcal{W} \subseteq \mathcal{C}(A) \Rightarrow \underline{U} \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow \bigwedge_{A \in \mathcal{R}} \mathcal{W} \subseteq \mathcal{C}(A) \Rightarrow A \in \underline{U} \\ &\Leftrightarrow \bigwedge_{A \in \mathcal{R}} \left(\left(\bigwedge_{\underline{U}' \in \mathcal{W}} \underline{U}' \in \mathcal{C}(A) \right) \Rightarrow A \in \underline{U} \right) \Leftrightarrow \bigwedge_{A \in \mathcal{R}} \left(\bigwedge_{\underline{U}' \in \mathcal{W}} A \in \underline{U}' \right) \Rightarrow A \in \underline{U} \\ &\Leftrightarrow \bigwedge_{A \in \mathcal{R}} A \in \bigcap \mathcal{W} \Rightarrow A \in \underline{U} \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{W} \subseteq \underline{U} \Leftrightarrow \underline{U} \in \mathcal{W}^*. \quad \text{qed} \end{aligned}$$

2. Die Einbettung von X in $\mathcal{W}(X, \mathcal{R})$

II.1. Definition :

Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring.

a) Sei $x \in X$. Setze $\mathcal{P}(x) = \{A \mid A \in \mathcal{R} \text{ und } x \in A\}$.

b) $\mathcal{R}$ heißt disjunktiv, wenn gilt: Ist $R \in \mathcal{R}$ und $x \notin R$, dann gibt es ein $S \in \mathcal{R}$ mit $x \in S$ und $S \cap R = \emptyset$.

c) $\mathcal{R}$ trennt Punkte, wenn zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ eine Menge $A \in \mathcal{R}$ existiert, welche genau einen von beiden enthält.

II.2. Lemma :

Es sind äquivalent :

a) $\mathcal{P} : X \longrightarrow \mathcal{W}(X, \mathcal{R})$ ist Abbildung.

b) $\mathcal{R}$ ist disjunktiv.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Für alle $x \in X$ ist $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{W}(X, \mathcal{R})$. Sei nun $R \in \mathcal{R}$ und $x \notin R$, d.h. $R \notin \mathcal{P}(x)$. Nach I.3. existiert $S \in \mathcal{P}(x)$ mit $R \cap S = \emptyset$. Es ist $x \in S$.

b) $\Rightarrow$ a): Die Eindeutigkeit von $\mathcal{P}(x)$ ist klar. $\mathcal{P}(x)$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft. Es ist noch $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{W}(X, \mathcal{R})$ zu zeigen. Wir benutzen I.3.. Sei $R \in \mathcal{R}$ und $R \cap S \neq \emptyset$ für alle $S \in \mathcal{P}(x)$. Angenommen $R \notin \mathcal{P}(x)$, d.h. $x \notin R$. Es gibt $S \in \mathcal{R}$ mit $S \cap R = \emptyset$ und $x \in S$, d.h. $S \in \mathcal{P}(x)$. Widerspruch!

II.3. Lemma :

Sei $\mathcal{R}$ disjunktiv, dann sind äquivalent:

- a) $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{M}(X, \mathcal{R})$ ist injektiv.
- b) $\mathcal{R}$ trennt Punkte.

Beweis: trivial.

II.4. Bemerkung :

Von nun ab sei $\mathcal{R}$ stets ein disjunktiver Ring, damit

$\varphi : X \longrightarrow \mathcal{M}(X, \mathcal{R})$ eine Abbildung ist.

II.5. Satz :

$\varphi : X \longrightarrow \mathcal{M}(X, \mathcal{R})$ hat die folgenden Eigenschaften:

- a) $\varphi[X]$ ist dicht in $\mathcal{M}(X, \mathcal{R})$.

Sei $R \in \mathcal{R}$, $F \subseteq X$. Dann gilt:

- b) $C(R) \cap \varphi[X] = \varphi[F]$.
- c) $\varphi[X - R] = \varphi[X] - \varphi[R]$.
- d) $\varphi[F \cap R] = \varphi[F] \cap \varphi[R]$.
- e) $\varphi[F]^* = C(F)$.
- f) $\varphi[F]^* = \{C(A) \mid F \subseteq A \in \mathcal{R}\}$.

Beweis: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

II.6. Lemma :

Sei $(X, \underline{X})$ topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

- a) $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{M}(X, \mathcal{R})$ ist stetig.
- b) $\mathcal{R}$ besteht aus abgeschlossenen Mengen.

Beweis: trivial.

II.7. Definition :

Sei $(X, \underline{X})$ topologischer Raum und $\mathcal{R}$ ein Ring abgeschlossener Mengen. $\mathcal{R}$ heißt separiert, wenn gilt: Ist $A \subseteq X$, $\bar{A} = A$ und $x \notin A$, dann existiert $F, S \in \mathcal{R}$ mit $x \in F$, $A \subseteq S$ und $F \cap S = \emptyset$.

II.8. Satz :

Es sind äquivalent:

- a) $\varphi: \lambda \longrightarrow \mathcal{MO}(X, \mathcal{R})$ ist dichte Einbettung.
- b) $(X, \underline{X})$ ist T_1 -Raum und $\mathcal{R}$ ist separiert.

Beweis: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

II.9. Bemerkung :

- a) $\mathcal{MO}(X, \mathcal{R})$ ist stets T_1 -Raum, ist φ injektiv, dann ist $(X, \underline{X})$ T_1 -Raum.
- b) Ist φ Abbildung, dann liefert $w(x) = \bigcap \{R \mid x \in R \in \mathcal{R}\}$ eine Partition von X . Es ist die zur Abbildung φ gehörende Zerlegung von X .
- c) $\mathcal{R}$ ist genau dann separiert, wenn $\mathcal{R}$ Basis der abgeschlossenen Mengen von $(X, \underline{X})$ und disjunktiv ist. $\mathcal{R}$ trennt dann genau dann Punkte, wenn $(X, \underline{X})$ das T_1 -Axiom erfüllt.

II.10. Definition :

Sei $\mathcal{R}$ ein separierter Ring abgeschlossener Mengen des T_1 -Raumes $(X, \underline{X})$. $\mathcal{R}$ heißt normal, wenn gilt: Sind $A, B \in \mathcal{R}$ und $A \cap B = \emptyset$, so existiert $C, D \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq X - C$, $B \subseteq X - D$ und $X - C \cap X - D = \emptyset$. Ein normaler Ring wird auch Wallman-Basis genannt.

II.11. Satz :

Es sind äquivalent :

- a) $\mathcal{R}$ ist ein normaler Ring.
- b) $\mathcal{MO}(X, \mathcal{R})$ ist Kompaktifizierung von X .

Beweis: Es bleibt nur das Hausdorff-Axiom nachzuweisen. Der Beweis ist der übliche.

II.12. Definition :

Sei $(X, \underline{X})$ T_1 -Raum und $\mathcal{R}$ ein separierter disjunktiver

Ring abgeschlossener Mengen von $(X, \underline{\mathcal{A}})$. $\mathcal{R}$ heißt regulär, wenn gilt: Ist $A \in \mathcal{R}$, $x \in X$, $x \notin A$, dann gibt es $B, C \in \mathcal{R}$ mit $x \in B$, $A \subseteq C$ und $X - B \cap X - C = \emptyset$.

II.13. Definition :

Voraussetzungen wie in II.12.. $\mathcal{M}(X, \mathcal{R})$ heißt hausdorffsch bzgl. X , wenn gilt: Ist $\mathcal{P}(x)$, $\underline{u} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{R})$, $\mathcal{P}(x) \neq \underline{u}$, dann gibt es disjunkte offene Umgebungen von $\mathcal{P}(x)$ und $\underline{u}$.

II.14. Satz :

Voraussetzungen wie in II.12.. Dann sind äquivalent:

- a) $\mathcal{M}(X, \mathcal{R})$ ist hausdorffsch bzgl. X .
- b) $\mathcal{R}$ ist regulär.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Sei $A \in \mathcal{R}$ und $x \notin A$. D.h. $A \notin \mathcal{P}(x)$ und $\mathcal{P}(x) \notin C(A)$. Da $\mathcal{M}(X, \mathcal{R})$ quasikompakt und hausdorffsch bzgl. X ist, gibt es $B, C \in \mathcal{R}$ mit $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{M}(X, \mathcal{R}) - C(B)$, $C(A) \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{R}) - C(C)$, $B \cup C = X$. Also $x \in X - B$, $A \subseteq X - C$.

b) $\Rightarrow$ a): Sei $\mathcal{P}(x) \neq \underline{u}$. Es gibt $A \in \underline{u}$ mit $x \notin A$ und damit existieren $B, C \in \mathcal{R}$ mit $x \in X - B$, $A \subseteq X - C$, $B \cup C = X$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{R}) - C(C)$, $\mathcal{M}(X, \mathcal{R}) - C(B)$ leisten das Gewünschte. qed

3. Bedingungen für die Wallman-Kompaktifizierbarkeit

III.1 Definition :

- a) Sei $(X, \underline{X})$ vollständig regulär und $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ eine Kompaktifizierung von X . $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ heißt Wallman-Kompaktifizierung von X , wenn ein normaler Ring abgeschlossener Mengen $\mathcal{A}$ und ein Homöomorphismus $h : \mathcal{C}_0(X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ existieren, wobei h eingeschränkt auf X die Identität liefert.
- b) Seien $(\hat{X}_1, \hat{\underline{X}}_1)$, $(\hat{X}_2, \hat{\underline{X}}_2)$ Kompaktifizierungen von X . Existiert eine surjektive stetige Abbildung $e : (\hat{X}_1, \hat{\underline{X}}_1) \longrightarrow (\hat{X}_2, \hat{\underline{X}}_2)$, die eingeschränkt auf X die Identität liefert, so schreiben wir $(X_1, \underline{X}_1) \geq (X_2, \underline{X}_2)$. Diese Definition läßt sich natürlich auf Quasikompaktifizierungen verallgemeinern.
- c) Seien $\underline{F}$, $\underline{G}$ Familien abgeschlossener Mengen des topologischen Raumes $(X, \underline{X})$. Wir sagen $\underline{F}$ separiert $\underline{G}$, wenn gilt:
Ist $G_1, G_2 \in \underline{G}$ und $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, dann existieren $F_1, F_2 \in \underline{F}$ mit $G_1 \subseteq F_1$, $G_2 \subseteq F_2$ und $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

III.2. Satz :

Seien $\underline{F}$, $\underline{G}$ normale Ringe abgeschlossener Mengen des vollständig regulären Raumes $(X, \underline{X})$. Dann gilt $\mathcal{M}(X, \underline{F}) \geq \mathcal{M}(X, \underline{G})$ genau dann, wenn $\underline{F}$ den Ring $\underline{G}$ separiert.

Beweis: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

III.3. Bemerkung :

a) III.1.b) definiert die übliche Halbordnung zwischen Kompaktifizierungen. Nach III.2. gibt es also einen Homöomorphismus $h : \mathcal{M}(X, \underline{G}) \rightarrow \mathcal{M}(X, \underline{F})$, der auf X eingeschränkt die Identität liefert, wenn $\underline{F}$ den Ring $\underline{G}$ und $\underline{G}$ den Ring $\underline{F}$ separiert.

b) Ein Ring abgeschlossener Mengen des kompakten Raumes $(Y, \underline{Y})$ ist schon dann normal, wenn er Basis der abgeschlossenen Mengen von $(Y, \underline{Y})$ ist.

III.4. Definition :

Sei $\mathcal{R}$ ein Ring abgeschlossener Mengen des topologischen Raumes $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ und $X \subseteq \hat{X}$. $\mathcal{R}$ heißt X -dicht, wenn für alle nicht-leeren $R \in \mathcal{R}$ gilt: $R \cap X \neq \emptyset$.

III.5. Satz :

Sei $(X, \underline{X})$ vollständig regulär und $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ Kompaktifizierung von X . Dann sind äquivalent:

- a) $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ ist Wallman-Kompaktifizierung von $(X, \underline{X})$.
- b) $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ besitzt einen X -dichten Ring abgeschlossener Mengen, der Basis der abgeschlossenen Mengen von $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ ist.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Es existiert ein normaler Ring $\underline{F}$ abgeschlossener Mengen, so daß $\underline{F} = \{ \bar{F} \mid F \in \underline{F} \}$ Basis der ab-

geschlossenen Mengen von $(\hat{X}, \underline{X})$ ist. Wegen I.6. gilt für endlich viele $F_1, \dots, F_n \in \underline{F}$ auch $\overline{F_1 \cap \dots \cap F_n} = \overline{F_1} \cap \dots \cap \overline{F_n}$, also ist $\underline{F}$ auch Ring. Wegen $\overline{F} \cap X = F$ für alle $F \in \underline{F}$ ist $\underline{F}$ X -dicht.

b) $\Rightarrow$ a): Sei $\hat{\underline{F}}$ ein X -dichter Ring abgeschlossener Mengen, der Basis der abgeschlossenen Mengen von $(\hat{X}, \underline{X})$ ist. $\hat{\underline{F}}$ ist separiert, damit ist auch $\underline{F} = \hat{\underline{F}} \cap X = \{ \hat{F} \cap X \mid \hat{F} \in \hat{\underline{F}} \}$ separiert in X . Nach II.8. ist $\mathcal{M}(X, \underline{F})$ T_1 -Quasikompaktifizierung von X . Wir zeigen $\hat{X} = \mathcal{M}(X, \underline{F})$ (gemäß III.1.a)). Man beachte $\overline{\hat{F} \cap X} = \hat{F}$ für alle $\hat{F} \in \hat{\underline{F}}$ (angenommen $z \in \hat{F} - \overline{\hat{F} \cap X}$. Dann gibt es $\hat{F}' \in \hat{\underline{F}}$ mit $z \in \hat{F}'$ und $\hat{F}' \cap \overline{\hat{F} \cap X} = \emptyset$, aber $\hat{F}' \cap \hat{F} \neq \emptyset$ und $\hat{F}' \cap \hat{F} \cap X = \emptyset$. Es ist für $\underline{x} \in \mathcal{M}(X, \underline{F}) \cap \{ \overline{\hat{F} \cap X} \mid F \in \underline{x} \} := \bigcap \overline{\hat{X}}$ genau einelementig. Definiere $h: \mathcal{M}(X, \underline{F}) \rightarrow \hat{X}$ durch $h(\underline{x}) = \bigcap \overline{\hat{X}}$. h ist injektiv: Sei $\underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{M}(X, \underline{F})$, $\underline{x} \neq \underline{y}$. Es existiert $A = \hat{A} \cap X \in \underline{x}$, $B = \hat{B} \cap X \in \underline{y}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Dann ist auch (wegen der X -Dichtheit) $\overline{A \cap X} \cap \overline{B \cap X} = \hat{A} \cap \hat{B} = \emptyset$, also $h(\underline{x}) \neq h(\underline{y})$. Trivialerweise ist h auf X die Identität. h ist stetig: Das folgt aus $h^{-1}[\hat{F}] = \overline{\hat{F} \cap X} \cap \mathcal{M}(X, \underline{F})$ für alle $\hat{F} \in \hat{\underline{F}}$. Sei nämlich $\underline{x} \in h^{-1}[\hat{F}] \Leftrightarrow \bigcap \overline{\hat{X}} \in \hat{F}$. Es gilt für alle $\hat{F}' \cap X \in \underline{x}$ also $\hat{F}' \cap \hat{F} \cap X \neq \emptyset$. Es folgt $X \cap \hat{F} \in \underline{x}$. D.h. $\bigcap \overline{\hat{X}} \in \hat{F} \Leftrightarrow \hat{F} \cap X \in \underline{x} \Leftrightarrow \underline{x} \in \overline{\hat{F} \cap X} \cap \mathcal{M}(X, \underline{F})$. qed

III.6. Bemerkung:

a) Wir sagen, eine Familie $\hat{\underline{F}}$ abgeschlossener Mengen von $(\hat{X}, \underline{X})$ besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft bzgl. $X \subseteq \hat{X}$, wenn für endlich viele $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_n \in \hat{\underline{F}}$ mit $\hat{F}_1 \cap \dots \cap \hat{F}_n \neq \emptyset$ folgt $\hat{F}_1 \cap \dots \cap \hat{F}_n \cap X \neq \emptyset$. Sei nun $\hat{\underline{F}}$ Basis der abgeschlossenen Mengen des kompakten Raumes $(\hat{X}, \underline{X})$. $\hat{\underline{F}}$ erzeugt einen Ring. Nach III.5. ist $\hat{X}$ Wall-

man-Kompaktifizierung vor $\lambda \in \hat{X}$, wenn $\underline{F}$ die endliche Durchschnittseigenschaft bzgl. X besitzt. Die Ring-eigenschaft wird in dieser Formulierung nicht benötigt.

b) III.5. besitzt auch eine allgemeinere Formulierung, in der "Kompaktifizierung" durch " T_1 -Quasikompaktifizierung" ersetzt wird. Allerdings ist dann für h noch die Surjektivität und für h^{-1} die Stetigkeit nachzuweisen.

III.7. Definition :

Sei $\underline{F}$ ein Ring abgeschlossener Mengen eines dichten Unter-
raumes $(X, \underline{X})$ des quasikomp. topologischen Raumes $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$.

Sei $\underline{U}$ ein $\underline{F}$ -Ultrafilter. Wir schreiben $\underline{U} \rightarrow x$ ($x \in \hat{X}$),
wenn $\bigcap \{ \overline{U^{\hat{X}}} \mid U \in \underline{U} \} = \{x\}$ gilt. Das ist genau dann der
Fall, wenn $\underline{U}$ in $\hat{X}$ gegen $x \in \hat{X}$ konvergiert.

III.8. Lemma :

Sei $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ quasikompakt. von $(X, \underline{X})$ und $\underline{F}$ ein Ring ab-
geschlossener Mengen von X . Wenn zu jedem $x \in \hat{X}$ ein
 $\underline{F}$ -Ultrafilter $\underline{U}$ existiert mit $\underline{U} \rightarrow x$, dann sind äquivalent:

- a) Für alle $A, B \in \underline{F}$ gilt: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \overline{A^{\hat{X}}} \cap \overline{B^{\hat{X}}} = \emptyset$.
b) Für alle $A, B \in \underline{F}$ gilt: $\overline{A \cap B^{\hat{X}}} = \overline{A^{\hat{X}}} \cap \overline{B^{\hat{X}}}$.

Beweis: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

III.9. Satz:

Sei $(X, \underline{X})$ dichter Unterraum des kompakten topologischen
Raumes $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ und $\underline{F}$ ein Ring abgeschlossener Mengen
von X . Dann sind äquivalent:

a) $\mathcal{MO}(X, \underline{F}) \cong \hat{\underline{X}}$.

b) a) Für alle $A, B \in \underline{F}$ gilt: $\overline{A \cap B^{\hat{X}}} = \overline{A^{\hat{X}}} \cap \overline{B^{\hat{X}}}$

β) Für alle $x, y \in \hat{X}$, $x \neq y$ existiert $A, B \in \underline{F}$ mit
 $x \in \overline{A^{\hat{X}}} - \overline{B^{\hat{X}}}$, $y \in \overline{B^{\hat{X}}} - \overline{A^{\hat{X}}}$ und $A \cap B = \emptyset$.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Sei $i : X \rightarrow \hat{X}$ die Einbettung von X in $\hat{X}$ und $s : \mathcal{M}(X, \underline{R}) \rightarrow \hat{X}$ der existierende Isomorphismus. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \hat{X} \\ \varphi \searrow & & \nearrow s \\ & \mathcal{M}(X, \underline{R}) & \end{array}$$

α) Wegen $\overline{\varphi[A]} = C(A)$ für $A \in \underline{R}$ folgt $s[C(A)] = s[\overline{\varphi[A]}] = \overline{s \cdot \varphi[A]}^{\hat{X}} = \overline{A}^{\hat{X}}$. Und weiter $\overline{A}^{\hat{X}} \cap \overline{B}^{\hat{X}} = s[C(A)] \cap s[C(B)] = s[C(A) \cap C(B)] = s[C(A \cap B)] = \overline{A \cap B}^{\hat{X}}$.

β) Das ist klar, da $\hat{X}$ T_2 -Raum ist und $\{\overline{L}^{\hat{X}} \mid L \in \underline{R}\}$ eine Basis der abgeschlossenen Mengen von $\hat{X}$ ist.

b) $\Rightarrow$ a): Definiere $s : \mathcal{M}(X, \underline{R}) \rightarrow \hat{X}$ durch $s(\underline{u}) = \bigcap \{\overline{U}^{\hat{X}} \mid U \in \underline{u}\}$ für alle $\underline{u} \in \mathcal{M}(X, \underline{R})$. $s(\underline{u})$ ist einelementig: $s(\underline{u}) \neq \emptyset$, da $\hat{X}$ kompakt. Sei $t_1, t_2 \in s(\underline{u})$, $t_1 \neq t_2$. Es existiert $A, B \in \underline{R}$ mit $t_1 \in \hat{X} - \overline{A}^{\hat{X}}$, $t_2 \in \hat{X} - \overline{B}^{\hat{X}}$ und $\hat{X} - \overline{A} \cap \hat{X} - \overline{B} = \emptyset$. Also $t_1 \notin \overline{A}$, $t_2 \in \overline{A}$. D.h. $\overline{U} \cap \overline{A} \neq \emptyset$ für alle $U \in \underline{u}$, wegen α) folgt $U \cap A \neq \emptyset$ für alle $U \in \underline{u}$. Da $\underline{u}$ maximal ist, also $A \in \underline{u}$. Widerspruch zu $t_1 \in \bigcap \{\overline{U} \mid U \in \underline{u}\}$. Natürlich gilt $s \circ \varphi = i$. s ist injektiv: Sei $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in \mathcal{M}(X, \underline{R})$ und $\underline{u}_1 \neq \underline{u}_2$. Es existiert $A \in \underline{u}_1, B \in \underline{u}_2$ mit $A \cap B = \emptyset$, es folgt $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ wegen α) und $\underline{u}_1 \in C(A)$, $\underline{u}_2 \in C(B)$, $s(\underline{u}_1) \in s[C(A)]$, $s(\underline{u}_2) \in s[C(B)]$. Nun gilt $s[C(A)] = \overline{A}$: Sei $t \in \hat{X}$, dann definiert $\underline{u}_t = \{U \mid U \in \underline{R} \text{ und } t \in \overline{U}\}$ einen $\underline{R}$ -Filter: Ist nämlich $t \in \overline{U}_1 \cap \dots \cap \overline{U}_n$, so folgt $U_1 \cap \dots \cap U_n \neq \emptyset$ wegen α). Außerdem gilt $\{t\} = \bigcap \{\overline{U} \mid U \in \underline{u}_t\}$. Der Beweis dafür wurde oben in ähnlicher Situation schon einmal geführt. Da $\hat{X}$ kompakt ist, konvergiert $\underline{u}_t$ mithin gegen t .

Wir können jetzt sogar zeigen, daß $\underline{u}_t$ maximal ist. Sei $\underline{L} \in \underline{R}$ und $\underline{L} \cap \underline{U} \neq \emptyset$ für alle $\underline{U} \in \underline{u}_t$. Angenommen $t \notin \overline{\underline{L}}^{\hat{X}}$. Wie üblich folgt aus $\beta)$ ($\hat{X}$ ist kompakt) und mit $\alpha)$ die Existenz von $\underline{C}, \underline{D} \in \underline{R}$ mit $t \in \hat{X} - \overline{\underline{C}}$, $\underline{L} \subseteq \hat{X} - \overline{\underline{D}}$ und $\hat{X} - \overline{\underline{C}} \cap \hat{X} - \overline{\underline{D}} = \emptyset$, jedenfalls $t \in \overline{\underline{D}}$ und $\underline{L} \cap \overline{\underline{D}} = \emptyset$, also $\underline{D} \in \underline{u}_t$ und $\underline{L} \cap \underline{D} = \emptyset$. Widerspruch! Trivialerweise gilt auch $s(\underline{u}_t) = t$. Sei nun $t \in \overline{\underline{A}}$, dann ist $\underline{u}_t \in C(A)$ und mithin $\overline{\underline{A}} \subseteq s[C(A)]$. Damit ist gleichzeitig die Surjektivität von s gezeigt worden. Sei $\underline{u} \in C(A)$, also $A \in \underline{u}$, daraus folgt $s(\underline{u}) = \bigcap \{ \overline{\underline{U}} / \underline{U} \in \underline{u} \} \subseteq \overline{\underline{A}}$, also $s[C(A)] \subseteq \overline{\underline{A}}$. Durch $\{ s[C(A)] / A \in \underline{R} \}$ wird eine quasikompakte Topologie auf $\hat{X}$ definiert, die gröber ist als die gegebene. Nach $\beta)$ ist sie T_2 -Topologie. Also ist s ein Homöomorphismus. qed

III.10. Bemerkung :

In III.8. wird gefordert, daß zu jedem $x \in \hat{X}$ ein $\underline{F}$ -Ultrafilter $\underline{u}$ existiert mit $\underline{u} \rightarrow x$. Gilt III.8.a), dann ist $\underline{u}$ eindeutig bestimmt. Jedem $t \in \hat{X}$ entspricht also ein und nur ein $\underline{F}$ -Ultrafilter $\underline{u}_t$. So ist der folgende Satz verständlich.

III.11. Satz :

Sei $\underline{F}$ Basis-Ring *) abgeschlossener Mengen des kompakten Raumes $(\hat{X}, \hat{X})$, $X \subseteq \hat{X}$ dicht und $\underline{F} = \underline{F} \cap X$.

Dann sind äquivalent:

a) $\hat{X} \cong \mathcal{MO}(X, \underline{F})$

b) Für alle $\underline{F}, \underline{G} \in \underline{F}$ gilt: Aus $\underline{F} \cap \underline{G} = \emptyset$ folgt $\overline{\underline{F}}^{\hat{X}} \cap \overline{\underline{G}}^{\hat{X}} = \emptyset$.

*) D.h. $\underline{F}$ ist Ring und gleichzeitig Basis der abgeschlossenen Mengen von $(\hat{X}, \hat{X})$.

Beweis: Wir benutzen III.9 und III.8.. Eine Richtung ist klar.
 III.9.b) β) folgt nun aus der Basiseigenschaft von
 $\{\bar{R}^{\hat{X}} / R \in \underline{R}\}$. qed

III.12. Satz :

Sei $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ T_1 -Quasikompaktifizierung von $(X, \underline{X})$ und $\underline{R}$ ein Ring abgeschlossener Mengen von $(X, \underline{X})$. Dann wird $\hat{\underline{X}}$ durch die folgenden beiden Eigenschaften von $\underline{R}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt:

I) $\{\bar{R}^{\hat{X}} / R \in \underline{R}\}$ ist Basis der abgeschlossenen Mengen von $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$.

II) Für alle $A, B \in \underline{R}$ gilt: $\overline{A \cap B}^{\hat{X}} = \overline{A}^{\hat{X}} \cap \overline{B}^{\hat{X}}$.

Beweis: Es wird die Homöomorphie von $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ zu $\mathcal{MO}(X, \underline{R})$ gezeigt. Sei $t \in \hat{X}$, wegen I) gilt $\{t\} = \bigcap \{\bar{R} / t \in \bar{R} \text{ und } R \in \underline{R}\}$. Wegen II) ist $\{U / t \in \bar{U} \text{ und } U \in \underline{R}\}$ ein $\underline{R}$ -Filter. Aus II) folgt auch, daß $\{U / t \in \bar{U}\} = \underline{u}_t$ ein $\underline{R}$ -Ultrafilter ist. Definiere eine Abbildung $s : \hat{X} \rightarrow \mathcal{MO}(X, \underline{R})$ durch $s(t) = \underline{u}_t$ für alle $t \in \hat{X}$. Die Abbildung s ist bijektiv und bistetig, wie man leicht sieht. qed

III.13. Satz :

Sei $\hat{\underline{R}}$ ein normaler Ring des topologischen Raumes $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$. Dann sind äquivalent:

- Für alle $X \in \hat{X}$ ist $\underline{R}_X = \hat{\underline{R}} \cap X = \{\hat{R} \cap X / \hat{R} \in \hat{\underline{R}}\}$ ein normaler Ring.
- Für alle $S \in \hat{X}$, wobei $\hat{X} - S \in \hat{\underline{R}}$ ist, ist $\underline{R}_S$ ein normaler Ring.

Beweis: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

III.14. Korollar :

Sei $\hat{\underline{R}}$ ein normaler Ring des topologischen Raumes $(\hat{X}, \hat{X})$.

Dann sind äquivalent:

- a) Für alle dichten $X \leq \hat{X}$ ist $\underline{R}_X$ ein normaler Ring.
- b) Für alle dichten S , wobei $\hat{X} - S \in \hat{\underline{R}}$ ist, ist $\underline{R}_S$ ein normaler Ring.

III.15. Satz :

Sei $(\hat{X}, \hat{X})$ ein kompakter Raum und $\hat{\underline{R}}$ ein Basis-Ring abgeschlossener Mengen von $(\hat{X}, \hat{X})$. Dann sind äquivalent:

- a) Für alle dichten Unterräume $(X, \underline{X})$ von $(\hat{X}, \hat{X})$ gilt $\hat{X} = \mathcal{MO}(X, \underline{R}_X)$.
- b) Für alle dichten Unterräume $(S, \underline{S})$ von $(\hat{X}, \hat{X})$ mit $\hat{X} - S \in \hat{\underline{R}}$ gilt $\hat{X} = \mathcal{MO}(X, \underline{R}_S)$.

Beweis: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

III.16. Satz :

Sei $(\hat{X}, \hat{X})$ Kompaktifizierung von $(X, \underline{X})$. Dann sind äquivalent:

- a) $\hat{X}$ ist Wallman-Kompaktifizierung von X .
- b) Es existiert ein normaler Ring $\underline{R}_X$ abgeschlossener Mengen von X mit den Eigenschaften:

$$\alpha) \text{ Für alle } A, B \in \underline{R}_X \text{ gilt:} \\ \overline{A \cap B}^{\hat{X}} = \overline{A}^{\hat{X}} \cap \overline{B}^{\hat{X}}.$$

$$\beta) \text{ Für alle } t \in \hat{X} \text{ und } U_t \in \underline{U}(t) \text{ existiert ein } C_t \in \underline{R}_X \\ \text{mit } t \in \overline{C_t} \subseteq U_t.$$

Beweis: Eine Richtung ist trivial, man beachte III.12..

Bei b) $\Rightarrow$ a) bleibt III.9.b) β) nachzuweisen. Sei $x_1, x_2 \in \hat{X}$, $x_1 \neq x_2$. Es existiert ein $C_1 \in \underline{R}_X$ mit $x_1 \in \overline{C_1}$ und $x_2 \notin \overline{C_1}$. Dann existiert auch $C_2 \in \underline{R}_X$ mit $x_2 \in \overline{C_2}$ und $\overline{C_2} \cap \overline{C_1} = \emptyset$. Da $\underline{R}_X$ normal ist, existiert $A, B \in \underline{R}_X$ mit

$C_1 \cap A = \emptyset$ und $C_2 \cap B = \emptyset$; $A \cap B = X$. Es folgt $\overline{C_1} \cap \overline{A} = \emptyset$.
 $\overline{C_2} \cap \overline{B} = \emptyset$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \hat{X}$. Also $x_1 \in \overline{C_1} \subseteq \hat{X} - \overline{A}$, $x_2 \in \overline{C_2} \subseteq \hat{X} - \overline{B}$,
 $\hat{X} - \overline{A} \cap \hat{X} - \overline{B} = X'$. qed

III.17. Satz :

Sei $\mathcal{W}(X, \underline{R})$ Wallman-Kompaktifizierung von $(X, \underline{X})$.

Dann ist das Gewicht des kompakten Raumes $\mathcal{W}(X, \underline{R})$ kleiner oder gleich der Kardinalzahl von $\underline{R}$.

Beweis: trivial.

III.18. Satz :

Sei $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ Kompaktifizierung von $(X, \underline{X})$. Dann sind äquivalent: a) $\hat{X}$ ist Wallman-Kompaktifizierung von X .

b) X besitzt einen normalen Ring $\underline{R}_X$ abgeschlossener Mengen mit a) $\overline{\hat{A}} \cap \overline{\hat{B}} = \overline{A \cap B}$.

β) Für alle $x_1, x_2 \in \hat{X}$, $x_1 \neq x_2$ existieren $A_1, A_2 \in \underline{R}_X$ mit $x_1 \in \overline{A_1}$, $x_2 \in \overline{A_2}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Beweis: Mit Hilfe von β) und der Normalität von $\underline{R}_X$ läßt sich III.9.b) β) nachweisen. qed

III.19. Satz :

Sei $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ Kompaktifizierung von $(X, \underline{X})$. Dann sind äquivalent: a) $\hat{X}$ ist Wallman-Kompaktifizierung von X .

b) Für alle $t \in \hat{X} - X$ existiert ein Netz

$\mathcal{F}_t(\Delta_t / \triangleright_t)$ in X , welches gegen t konvergiert, so daß die Mengenfamilie $\underline{F} = \{F / F \subseteq \hat{X}, \overline{F} = F, \text{ ist } t \in F \cap \hat{X} - X, \text{ dann ist } \mathcal{F}_t(\Delta_t / \triangleright_t) \text{ fast } ^*) \text{ in } F\}$ separiert ist.

Beweis: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

*) Es exist. $\sigma_0 \in \Delta_t$, so daß für alle $\sigma \triangleright \sigma_0$ ($\sigma \in \Delta_t$) $\mathcal{F}_t(\sigma) \in F$ gilt.

III.20. Satz :

Es sind äquivalent:

- a) Jede Kompaktifizierung eines vollständig regulären Raumes ist Wallman-Kompaktifizierung.
- b) Jede Kompaktifizierung eines diskreten Raumes ist Wallman-Kompaktifizierung.

Beweis: Eine Richtung ist trivial. Sei nun $(\hat{X}, \hat{X})$ Kompaktifizierung von $(X, \underline{X})$. Sei X_D der Raum X versehen mit der diskreten Topologie. Sei $1_X : X_D \rightarrow X$ die Identität auf X . Wir versehen die disjunkte Vereinigung $\hat{X} \cup X_D$ mit folgender Topologie: Alle Punkte $x \in X_D$ seien offen in $\hat{X} \cup X_D$. $O \subseteq \hat{X} \cup X_D$ sei außerdem offen, wenn $O = U \cup 1_X^{-1}[U]$ für eine geeignete in $\hat{X}$ offene Menge $U \subseteq \hat{X}$ gilt. Dann ist $\hat{X} \cup X_D$ Kompaktifizierung von X_D . Es existiert ein Mengenring $\underline{F} \subseteq \underline{1}(X_D)$, so daß $\underline{F} = \{ \bar{F} \mid F \in \underline{F} \}$ X_D -dichter Basis-Ring der abgeschlossenen Mengen von $\hat{X} \cup X_D$ ist. Wir zeigen nun für alle $F \in \underline{F}$ $\overline{1_X[F]} = \bar{F} \cap \hat{X} \cup 1_X[F] \subseteq \bar{F}$ folgt leicht aus der Definition der Topologie. Da $\hat{X}$ als kompakter Raum abgeschlossen in $\hat{X} \cup X_D$ liegt, gilt jedenfalls $\overline{1_X[F]} \subseteq \bar{F} \cap \hat{X}$. Sei $z \in \bar{F} \cap \hat{X}$. Angenommen $(U_z \cup 1_X^{-1}[U_z]) \cap 1_X[F] = \emptyset$, also $U_z \cap 1_X[F] = \emptyset$ für eine Umgebung U_z von z in $\hat{X}$. Dann folgt $1_X^{-1}[U_z] \cap F = \emptyset$ im Widerspruch zu $z \in \bar{F}$. Da $\underline{F}$ Basis-Ring für $\hat{X} \cup X_D$ ist, stellt $1_X[\underline{F}] = \{ \overline{1_X[F]} \mid F \in \underline{F} \}$ also einen Basis-Ring der abgeschlossenen Mengen von $\hat{X}$ dar. $1_X[\underline{F}]$ ist auch X -dicht, was sofort aus $\overline{1_X[F]} \cap X = 1_X[F]$ folgt. Nach III.5. ist der Beweis beendet. qed

4. Konstruktionen der Wallman-Kompaktifizierung

IV. 1. Bemerkung :

- a) Satz III.20. wirft folgende Frage auf: Ist jede Kompaktifizierung eines vollständig-regulären Raumes Wallman-Kompaktifizierung? Dieses ungelöste Problem ist unter dem Namen "Wallman-Basis-Problem" bekannt.
- b) Jeder totalbeschränkte hausdorffsche uniforme Raum besitzt eine kompakte Vervollständigung. Jeder hausdorffsche Proximitätsraum ist dicht in seiner Smirnov-Kompaktifizierung eingebettet. Jeder quasikompakte T_1 -Raum ist homöomorph zum Unterraum der abgeschlossenen Punkte des Grenzraumes seines Zerlegungsspektrums aus endlichen T_0 -Räumen. Diese drei Verfahren, kompakte Räume zu erzeugen, werden nun in Ihrer Beziehung zur Wallman-Kompaktifizierung untersucht.

IV.2. Satz :

Sei (X, μ) ein totalbeschränkter hausdorffscher uniformer Raum. Dann sind äquivalent :

- a) Die Hausdorff-Vervollständigung $(\hat{X}, \hat{\mu})$ ist Wallman-Kompaktifizierung von (X, μ) .
- b) Es gibt eine Basis $\underline{B}$ der offenen Mengen von $(X, \underline{\mu})$, so daß alle endlichen offenen Überdeckungen aus Elementen von $\underline{B}$ eine Basis von $\underline{\mu}$ bilden.

Beweis: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

IV.3. Satz :

Sei $(X, \underline{X})$ T_1 -Raum und $\underline{F}$ ein normaler Basis-Ring der abgeschlossen Mengen von $(X, \underline{X})$. Dann wird durch $A \in \underline{F}^B$
 $\bigvee_{C, D \in \underline{F}} A \subseteq C \subseteq X - D \subseteq B$ eine Relation zwischen Teilmengen A, B von X definiert, die die Axiome für (Efremovič-) Proximitätsumgebungen erfüllt.

Beweis: $pU_1)$ $X \in \underline{X}$, wegen $\emptyset \in \underline{F}$ und $X \in \underline{F}$.

$pU_2)$ Klar.

$pU_3)$ Klar.

$pU_4)$ Sei $A \in B_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Nach Definition existiert $C_k, D_k \in \underline{F}$ mit $A \subseteq C_k \subseteq X - D_k \subseteq B_k$. Es folgt $A \subseteq \bigcap_{k=1}^n C_k \subseteq \bigcap_{k=1}^n (X - D_k) = X - \bigcup_{k=1}^n D_k \subseteq \bigcap_{k=1}^n B_k$. Es ist $\bigcap_{k=1}^n C_k$, $\bigcup_{k=1}^n D_k \in \underline{F}$, also $A \in \bigcap_{k=1}^n B_k$.

$pU_5)$ Sei $A \in B$. Nach Definition existiert $C, D \in \underline{F}$ mit $A \subseteq C \subseteq X - D \subseteq B$. Es folgt $X - B \subseteq D \subseteq X - C \subseteq X - A$, also $X - B \in X - A$.

$pU_6)$ Sei $A \in B$. Es existiert $C, D \in \underline{F}$ mit $A \subseteq C \subseteq X - D \subseteq B$. Aus $C \subseteq X - D$ folgt $C \cap D = \emptyset$. Es existiert $R, S \in \underline{F}$ mit $C \subseteq X - R$, $D \subseteq X - S$ und $X - R \cap X - S = \emptyset$. Aus $X - R \cap X - S = \emptyset$ folgt $X - R \subseteq S$, aus $D \subseteq X - S$ folgt $S \subseteq X - D$, also $A \subseteq C \subseteq X - R \subseteq S \subseteq X - D \subseteq B$, das heißt $A \in S \in B$.

$pU_7)$ Klar. qed

IV.4. Bemerkung :

a) IV.3. benutzt den Begriff "p-Umgebung" aus der Theorie der Proximitätsräume. In der δ -Sprechweise lautet die

Aussage dieses Satzes folgendermaßen: "Durch $A \mathcal{S}_{\underline{F}} B$
 $\swarrow$
 $C, D \in \underline{F} \quad A \leq C \wedge B \leq D \Rightarrow C \cap D \neq \emptyset$ wird eine Efremovič-Proximitätsrelation $\mathcal{S}_{\underline{F}}$ definiert."

b) Es sei in Erinnerung gerufen, daß jede Kompaktifizierung $\hat{X}$ von X Smirnov-Kompaktifizierung von X ist bzgl. der eindeutig bestimmten Proximitätsrelation $\mathcal{S}$ (Smirnovrelation) auf X : $A \mathcal{S} B \Leftrightarrow \overline{A}^{\hat{X}} \cap \overline{B}^{\hat{X}} \neq \emptyset$.

IV.5. Definition :

Sei $(X, \mathcal{S})$ ein Proximitätsraum.

- a) $A, B \in \underline{P}(X)$ heißen entfernt, wenn $A \not\mathcal{S} B$ gilt.
- b) Wir sagen $A, B \in \underline{P}(X)$ werden durch $C, D \in \underline{P}(X)$ separiert, wenn C, D entfernt sind und $A \leq C, B \leq D$ gilt.
- c) $\underline{F} \leq \underline{P}(X)$ heißt Basis der Proximität $\mathcal{S}$, wenn aus $F, G \in \underline{F}$ und $F \cap G = \emptyset$ folgt, daß F und G entfernt sind und zwei entfernte Teilmengen von X durch Elemente aus $\underline{F}$ separiert werden.

IV.6. Satz :

Sei $\hat{X} = \mu\mathcal{O}(X, \underline{F})$ Wallman-Kompaktifizierung von X .

Dann ist $\underline{F}$ Basis der Smirnov-Relation auf X .

Beweis: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

IV.7. Satz :

Sei $(X, \mathcal{S})$ Proximitätsraum. Besitzt $\mathcal{S}$ einen Basis-Ring ^{*)}
 $\underline{F}$ abgeschlossener Mengen, so ist $\underline{F}$ ein normaler Ring.

^{*)} D.h. $\underline{F}$ ist Mengenring und Basis von $\mathcal{S}$.

Beweis: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

IV.8. Satz :

Sei $\hat{X} = \mathfrak{m}(X, \underline{F})$ Wallman-Kompaktifizierung von X . Dann ist $\hat{X}$ Smirnov-Kompaktifizierung von $(X, \delta_{\underline{F}})$ bzgl. der in IV.4. eingeführten Proximität $\delta_{\underline{F}}$.

Beweis: Wir benutzen die Konstruktion der Smirnov-Kompaktifizierung mit Hilfe von Büscheln.

1. Konstruktion einer bijektiven Abbildung $s: \mathfrak{m}(X, \underline{F}) \rightarrow (\mathcal{K}, \delta_{\underline{F}}^*)$, wobei $(\mathcal{K}, \delta_{\underline{F}}^*)$ die Smirnov-Kompaktifizierung von $(X, \delta_{\underline{F}})$ bezeichnet: Sei $\underline{u} \in \mathfrak{m}(X, \underline{F})$ ein $\underline{F}$ -Ultrafilter. Definiere $s(\underline{u}) = \{A \mid A \in X \wedge \bigcap_{U \in \underline{u}} A \delta_{\underline{F}} U\}$. Es ist $\bigcap_{U \in \underline{u}} \bar{U}^{\hat{X}} = \{\underline{u}\}$. Wegen

z.B. III.9. ist $A \delta_{\underline{F}} U$ äquivalent zu $\bar{A}^{\hat{X}} \cap \bar{U}^{\hat{X}} \neq \emptyset$. Aus der Kompaktheit folgt die Äquivalenz $\bigcap_{U \in \underline{u}} \bar{A}^{\hat{X}} \cap \bar{U}^{\hat{X}} \neq \emptyset \iff$

$\{\underline{u}\} \in \bar{A}^{\hat{X}}$. Damit gilt $s(\underline{u}) = \{A \mid A \in X \wedge \underline{u} \in \bar{A}^{\hat{X}}\}$ und $s(\underline{u})$ ist ein Büschel (notwendigerweise ein Punktbüschel, da $\mathfrak{m}(X, \underline{F})$ ja kompakt ist). s ist injektiv: sei $\underline{u}, \underline{v} \in \mathfrak{m}(X, \underline{F})$ und $\underline{u} \neq \underline{v}$. Dann existiert $U \in \underline{u}, V \in \underline{v}$ mit $U \cap V = \emptyset$, also $\bar{U}^{\hat{X}} \cap \bar{V}^{\hat{X}} = \emptyset$, d.h. $U \not\delta_{\underline{F}} V$, mithin $s(\underline{u}) \neq s(\underline{v})$. s ist surjektiv: sei $\sigma \in \mathcal{K}$ ein Büschel. Alle Büschel haben die Form $\{A \mid A \in X \wedge \bigcap_{U \in \underline{u}} A \delta_{\underline{F}} U\}$, wobei $\underline{u} \in \mathfrak{m}(X, \underline{F})$ ist. Dann gilt $\sigma = \{A \mid A \in X \wedge \underline{u}_\sigma \in \bar{A}^{\hat{X}}\}$ für ein geeignetes $\underline{u}_\sigma \in \mathfrak{m}(X, \underline{F})$. Wegen $\{\underline{u}_\sigma\} = \bigcap_{U \in \underline{u}} \bar{U}^{\hat{X}}$ gilt $s(\underline{u}_\sigma) = \sigma$. 2. Nachweis der Stetigkeit:

Sei $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}$ und $\sigma \in \mathcal{Q}$, d.h. $\sigma \delta^* \mathcal{Q}$, also $\bigcap \mathcal{Q} \subseteq \sigma$ nach Definition von δ^* . Es ist $s^{-1}[\mathcal{Q}] = \{\underline{u} \mid s(\underline{u}) \supseteq \bigcap \mathcal{Q}\}$. Sei $\underline{p} \in \mathcal{Q}$, dann gilt $\underline{p} = \{A \mid A \in X \wedge \underline{u}_p \in \bar{A}^{\hat{X}}\}$ für geeignetes $\underline{u}_p$. Sei $\mathcal{N} = \{\underline{u}_p \mid \underline{p} \in \mathcal{Q}\}$. Dann gilt $s^{-1}[\mathcal{Q}] = \overline{\mathcal{N}}^{\hat{X}}$. qed

IV.9. Bemerkung :

Sei $(X, \underline{X})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{U}$ eine endliche offene Überdeckung von X . Dann wird durch $x \in_{\mathcal{U}} y \iff \bigwedge_{U \in \mathcal{U}} \{x, y\} \cap U \neq \emptyset \vee \{x, y\} \subseteq U$ eine Äquivalenzrelation $R_{\mathcal{U}}$ auf X definiert. Der Quotientenraum $X/R_{\mathcal{U}}$ ist ein endlicher T_0 -Raum. Betrachten wir nun das System μ aller endlichen offenen Überdeckungen des T_0 -Raumes $(X, \underline{X})$. So sind bekanntlich die endlichen T_0 -Räume $(X/P_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U} \in \mu}$ Grundlage zur Konstruktion eines inversen Spektrums, nämlich des offenen finiten Zerlegungsspektrums von $(X, \underline{X})$. Der Grenzraum dieses Spektrums ist eine quasikompakte T_0 -Erweiterung von $(X, \underline{X})$, welche schon Eigenschaften besitzt, die der Wallman-Kompaktifizierung eigentümlich sind. Betrachtet man den Unterraum aller abgeschlossenen Punkte dieses Grenzraumes für einen T_1 -Raum $(X, \underline{X})$, so liefert er uns die Wallman- T_1 -Quasikompaktifizierung $\omega(X, \underline{A})$ von $(X, \underline{X})$, wobei $\underline{A}$ der Ring aller abgeschlossenen Mengen ist. In IV.8. wurde die Wallman-Kompaktifizierung durch die Smirnov-Kompaktifizierung dargestellt. Es sollen nun zum gleichen Zweck Grenzräume inverser Spektra herangezogen werden. Dazu sind einige Vorbereitungen nötig.

IV.10. Definition :

Sei $(X, \underline{X})$ ein T_0 -Raum und $\underline{P}$ ein Basis-Ring abgeschlossener Mengen von $(X, \underline{X})$. Sei $\mathcal{A}(X, \underline{P})$ die Menge aller $\underline{P}$ -Primfilter. Ähnlich wie in I.5. sei für ein $R \in \underline{P}$ $C(R) = \{ \underline{P} \mid \underline{P} \in \mathcal{A}(X, \underline{P}) \wedge R \in \underline{P} \}$. $C(\underline{P}) = \{ C(R) \mid R \in \underline{P} \}$ sei Basis abgeschlossener Mengen der Topologie auf $\omega(X, \underline{P})$.

Sei $\varphi: X \longrightarrow \mathcal{R}(X, \underline{R})$ definiert durch $\varphi(x) = \{A \mid A \in \underline{R} \text{ und } x \in A\}$.

IV.11. Lemma :

Sei $(X, \underline{X})$ T_0 -Raum und $\underline{R}$ Basis-Ring abgeschlossener Mengen von $(X, \underline{X})$. Dann gilt :

- a) $\varphi: X \longrightarrow \mathcal{R}(X, \underline{R})$ ist dichte Einbettung.
 b) Es gilt $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$ und $C(A \cap B) = C(A) \cap C(B)$ für $A, B \in \underline{R}$.

Die abgeschlossene Hülle von A in $\mathcal{R}(X, \underline{R})$ ist $C(A)$.

- c) $\mathcal{R}(X, \underline{R})$ ist quasikompakter T_0 -Raum (jeder $\underline{R}$ -Primfilter besitzt einen Häufungspunkt).
 d) Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}(X, \underline{R})$. Durch den Hüllenoperator $\mathcal{U}^* = \{p \mid p \in \mathcal{R}(X, \underline{R}) \wedge p \supseteq \bigcap \mathcal{U}\}$ wird die gleiche Topologie auf $\mathcal{R}(X, \underline{R})$ definiert.

Beweis: a) φ ist Abbildung: Sei $A, B \in \underline{R}$ und $A \cup B \in \varphi(x)$, also $x \in A \cup B$. Dann gilt $x \in A$ oder $x \in B$, jedenfalls $A \in \varphi(x)$ oder $B \in \varphi(x)$. Die $\underline{R}$ -Filtereigenschaft von $\varphi(x)$ ist klar. φ ist stetig: Sei $C(A) \in C(\underline{R})$. Dann ist $\varphi^{-1}[C(A)] = \{x \mid x \in A\} = A$. φ ist injektiv: Sei $x, y \in X$ und o.B.d.A. $y \notin \overline{\{x\}}$. Es gibt $R \in \underline{R}$ mit $x \in R$ und $y \notin R$. Dann ist $R \in \varphi(x)$ und $R \notin \varphi(y)$, also $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

$\varphi': X \longrightarrow \varphi[X]$ ist abgeschlossen: Sei $A \in \underline{R}$ und $\varphi(z) \in C(A)$, also $z \in A$. Es folgt $\varphi(z) \in \varphi[A]$ und $\varphi[A] = C(A) \cap \varphi[X]$. $\varphi[X]$ ist dicht in $\mathcal{R}(X, \underline{R})$: Sei $A \in \underline{R}$ und $\varphi[X] \subseteq C(A)$, d.h. aus $x \in X$ folgt $x \in A$, also gilt $A = X$ und $C(A) = \mathcal{R}(X, \underline{R})$.

b) Analog zu I.6. .

c) Der erste Teil geht analog zu I.5.. Man beachte, daß ein $\underline{R}$ -Ultrafilter auch ein $\underline{R}$ -Primfilter ist. Sei nun $p_1, p_2 \in \mathcal{R}(X, \underline{R})$ und $p_1 \neq p_2$. Sei o.B.d.A. $A \in p_1$, $A \notin p_2$. Dann ist $p_1 \in C(A)$ und $p_2 \notin C(A)$.

d) Analog zu I.10..

IV.12. Satz :

Sei $(X, \underline{X})$ T_0 -Raum und $\underline{R}$ Basis-Ring der abgeschlossenen Mengen von $(X, \underline{X})$. Dann ist $\bar{X} = \mathcal{R}(X, \underline{R})$ als quasikompakte T_0 -Erweiterung bis auf Isomorphie ^{*)} durch folgende drei Eigenschaften gekennzeichnet:

- i) $\{\bar{R} / R \in \underline{R}\}$ ist Basis der abgeschlossenen Mengen von $\bar{X}$.
- ii) Es gilt $\overline{R_1 \cap R_2} = \bar{R}_1 \cap \bar{R}_2$ für $R_1, R_2 \in \underline{R}$.
- iii) $\bar{X}$ ist maximal im folgenden Sinne:
 - a) Ist $\hat{X}$ eine T_0 -Erweiterung von X , die i) und ii) erfüllt, dann gibt es eine Einbettung ^{*)} von $\hat{X}$ in $\bar{X}$.
 - b) Ist $\hat{X}$ eine T_0 -Erweiterung von X , die i) und ii) erfüllt und gibt es eine Einbettung ^{*)} von $\bar{X}$ in $\hat{X}$, dann ist diese Einbettung ein Isomorphismus.

Beweis: $\mathcal{R}(X, \underline{R})$ hat die Eigenschaften i) und ii). Es bleibt iii) nachzuweisen. Sei $\hat{X}$ eine T_0 -Erweiterung von X , die i) und ii) erfüllt. Sei $\hat{x} \in \hat{X}$. $s(\hat{x}) := \{A / A \in \underline{R} \wedge \hat{x} \in \bar{A}\}$ ist wegen ii) ein $\underline{R}$ -Primfilter. Die soeben definierte Abbildung $s : \hat{X} \rightarrow \mathcal{R}(X, \underline{R})$ ist wegen i) und der T_0 -Eigenschaft von $\hat{X}$ auch injektiv. s ist stetig: Sei $A \in \underline{R}$,

^{*)} Eingeschränkt auf X soll sich die Identität ergeben.

dann gilt $s^{-1}[\bar{A}^{\hat{X}}] = \{\hat{y} \mid \hat{y} \in \hat{X} \text{ und } s(\hat{y}) \in \bar{A}^{\hat{X}}\} =$
 $= \{\hat{y} \mid \hat{y} \in \hat{X} \text{ und } A \in s(\hat{y})\} = \{\hat{y} \mid \hat{y} \in \bar{A}^{\hat{X}}\} = \bar{A}^{\hat{X}}.$
 $s' : \hat{X} \rightarrow s[\hat{X}]$ ist abgeschlossen: Es gilt $s[\bar{A}^{\hat{X}}] =$
 $= s[\hat{X}] \cap \bar{A}^{\hat{X}}$, sei nämlich $s(\hat{x}) \in \bar{A}^{\hat{X}}$, also $A \in s(\hat{x})$ und
damit $\hat{x} \in \bar{A}^{\hat{X}}$. s ergibt eingeschränkt auf X natürlich die
Identität.

Sei nun $\hat{X}$ eine T_0 -Erweiterung von X , die i) und ii) erfüllt und eine Einbettung $s : \mathcal{R}(X, \underline{R}) \rightarrow \hat{X}$ gegeben. Es bleibt die Surjektivität von s zu zeigen. Sei $\hat{x} \in \hat{X}$, dann ist $\underline{P}_{\hat{x}} = \{A \mid A \in \underline{R} \text{ und } \hat{x} \in \bar{A}^{\hat{X}}\}$ ein $\underline{R}$ -Primfilter. Angenommen $s(\underline{P}_{\hat{x}}) \neq \hat{x}$. Es ist $\underline{P}_{\hat{x}} \in \bigcap_{A \in \underline{P}_{\hat{x}}} \bar{A}^{\mathcal{R}(X, \underline{R})}$, also wegen der Stetigkeit von s $s(\underline{P}_{\hat{x}}) \in \bigcap_{A \in \underline{P}_{\hat{x}}} \bar{A}^{\hat{X}}$.

Damit ist $s(\underline{P}_{\hat{x}})$ in allen abgeschlossenen Mengen enthalten, die $\hat{x}$ enthalten. Da $\hat{X}$ T_0 -Raum ist, gibt es eine abgeschlossene Menge $\bar{B}^{\hat{X}}$ mit $s(\underline{P}_{\hat{x}}) \in \bar{B}^{\hat{X}}$ und $\hat{x} \notin \bar{B}^{\hat{X}}$, wobei $B \in \underline{R}$. Dann folgt $s(\underline{P}_{\hat{x}}) \in \bar{B}^{\hat{X}} \cap s[\mathcal{R}(X, \underline{R})] = \overline{s[B]}^{\hat{X}} \cap s[\mathcal{R}(X, \underline{R})] = \overline{s[B]}^{s[\mathcal{R}(X, \underline{R})]}$. Da $s' : \mathcal{R}(X, \underline{R}) \rightarrow s[\mathcal{R}(X, \underline{R})]$ Isomorphismus ist mithin $\underline{P}_{\hat{x}} \in \bar{B}^{\mathcal{R}(X, \underline{R})}$, also $B \in \underline{P}_{\hat{x}}$. Das ist ein Widerspruch zu $\hat{x} \notin \bar{B}^{\hat{X}}$.

Sei nun $\bar{X}$ eine T_0 -Erweiterung von X , die i), ii) und iii) erfüllt, es bleibt die Homöomorphie zu $\mathcal{R}(X, \underline{R})$ zu zeigen. Wie oben gezeigt wurde, hat $\mathcal{R}(X, \underline{R})$ sicherlich die Eigenschaften i), ii) und iii). Aus iii)a) und iii)b) folgt nun leicht die Isomorphie. Es sei abschließend bemerkt, daß die Quasikompaktheit nicht benötigt wurde. Eine T_0 -Erweiterung, die i), ii) und iii) erfüllt, ist also notwendig quasikompakt (da Homöomorph zu $\mathcal{R}(X, \underline{R})$). qed

IV.13. Lemma :

Sei $\mathcal{A}$ Mengenring der Menge X und $C\mathcal{A} = \{X-A \mid A \in \mathcal{A}\}$.
 Dann gilt: Es gibt eine Bijektion η von der Menge der
 $\mathcal{A}$ -Primfilter auf die Menge der $\mathcal{A} \cup C\mathcal{A}$ -Ultrafilter.

Beweis: Sei $\underline{U}$ ein $\mathcal{A}$ -Primfilter. Definiere $\eta(\underline{U}) =$
 $= (\{ X-A \mid A \in \mathcal{A}, \bigwedge_{U \in \underline{U}} X-A \cap U \neq \emptyset \} \cup \underline{U})$. Dann ist $\eta(\underline{U})$
 ein $\mathcal{A} \cup C\mathcal{A}$ -Ultrafilter: Seien $A, A' \in \mathcal{A}$ und $X-A, X-A' \in$
 $\eta(\underline{U})$. Angenommen es existiert ein $U \in \underline{U}$ mit $X-A \cap X-A' \cap U =$
 $= \emptyset$, also $U \subseteq A \cup A'$. Da $\underline{U}$ $\mathcal{A}$ -Primfilter ist, folgt
 $A \in \underline{U}$ oder $A' \in \underline{U}$. In beiden Fällen ergibt sich ein Wider-
 spruch zu $X-A \in \eta(\underline{U})$ bzw. $X-A' \in \eta(\underline{U})$. Sei $A \in \mathcal{A}$ und
 $A \cap D \neq \emptyset$ für alle $D \in \eta(\underline{U})$. Angenommen $A \notin \eta(\underline{U})$. Dann
 gilt für alle $U \in \underline{U}$ aber $U \not\subseteq A$, d.h. $U \cap X-A \neq \emptyset$.. Jeden-
 falls folgt daraus $X-A \in \eta(\underline{U})$ und damit ein Wider-
 spruch zu $A \cap D \neq \emptyset$ für alle $D \in \eta(\underline{U})$. Ist $X-A \cap D \neq \emptyset$
 für alle $D \in \eta(\underline{U})$, dann ist erst recht $X-A \cap U \neq \emptyset$ für
 alle $U \in \underline{U}$ und $X-A \in \eta(\underline{U})$ nach Definition. η ist injek-
 tiv: Sei $\underline{U} \neq \underline{U}'$ und o.B.d.A. $U \in \underline{U}$, $U \notin \underline{U}'$. Für alle
 $U' \in \underline{U}'$ ist dann $U' \cap X-U \neq \emptyset$. Also $X-U \in \eta(\underline{U}')$ und $X-U \notin$
 $\eta(\underline{U})$. η ist surjektiv: Sei $\underline{V}$ ein $\mathcal{A} \cup C\mathcal{A}$ -Ultrafil-
 ter und $\underline{U} = \underline{V} \cap \mathcal{A}$. $\underline{U}$ ist natürlich ein $\mathcal{A}$ -Primfilter.
 Es folgt leicht $\underline{V} \subseteq \eta(\underline{U})$, die Gleichheit folgt aus der
 Maximalität. qed

IV.14. Definition :

Sei $(X, \underline{X})$ ein T_0 -Raum und $\underline{E}$ ein Basis-Fing der abge-
 schlossenen Mengen von $(X, \underline{X})$. Sei $\mu_{\underline{E}} = \{\mu_e \mid e \in \underline{E}\}$ das

System aller endlichen offenen Überdeckungen bestehend aus Komplementen von Elementen aus $\underline{E}^*$). Jedes $\mathcal{V}_\alpha \in \mathcal{U}_{\underline{E}}$ definiert bekanntlich eine Äquivalenzrelation R_α durch: " $x \sim_\alpha y$ genau dann, wenn kein $U_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$ existiert, welches genau einen der beiden Punkte $x, y \in X$ enthält". Die Quotientenräume $X_\alpha = X/R_\alpha$ sind endliche T_0 -Räume. Ist $R_\alpha \subseteq R_\beta$, dann läßt sich in natürlicher Weise eine stetige Abbildung $\pi_\beta^\alpha: X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ definieren. $\{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha\}_{\alpha \in A}$ ist ein fundamentales Zerlegungsspektrum des Raumes $(X, \underline{X})$. Dabei wird A mit folgender Relation zu einer gerichteten Menge: $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow R_\beta \subseteq R_\alpha$.

IV.15. Satz:

Sei $(X, \underline{X})$ T_0 -Raum und $\underline{E}$ ein Basis Ring der abgeschlossenen Mengen von $(X, \underline{X})$. Sei $(X_\infty, \underline{X}_\infty)$ der Grenzraum des inversen Spektrums $\{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha\}_{\alpha \in A}$. Dann ist $(X_\infty, \underline{X}_\infty)$ isomorph zu $\beta\mathcal{R}(X, \underline{E})$. Der Isomorphismus ist auf X die Identität.

Beweis: Sei $x_\alpha = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Faden des Grenzraumes $(X_\infty, \underline{X}_\infty)$. Dann ist $\underline{U}_{x_\alpha} = (\{B \mid B \in \underline{E} \cup \underline{CR} \wedge \bigvee_{\alpha \in A} x_\alpha \in B\})$ ein $\underline{E} \cup \underline{CR}$ -Ultrafilter: Sei nämlich $B_1, \dots, B_n \in \underline{U}_{x_\alpha}$, dann gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ mit $x_{\alpha_1} \in B_1, \dots, x_{\alpha_n} \in B_n$, es gibt $\beta \in A$ mit $\beta \geq \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Dann ist $x_\beta \in B_1 \cap \dots \cap B_n$. Sei $B' \in \underline{E} \cup \underline{CR}$ und $B' \cap B \neq \emptyset$ für alle $B \in \underline{U}_{x_\alpha}$. Das ist äquivalent zu $B' \cap x_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in A$. Es gibt ein $\alpha' \in A$, so daß B' bzgl. $R_{\alpha'}$ gesättigt ist. Dann ist $x_{\alpha'} \in B'$ und $B' \in \underline{U}_{x_{\alpha'}}$. Sei umgekehrt ein $\underline{E} \cup \underline{CR}$ -Ultrafilter $\underline{U}_{x_\alpha}$ kurz: bestehend aus $\underline{E}$ -offenen Mengen.

ben. Sei $\alpha \in A$. F_α definiert eine Zerlegung von X in disjunkte Äquivalenzklassen. Jede Äquivalenzklasse ist aber Schritt von Elementen aus $\underline{E} \vee \underline{CR}$. Da die Vereinigung aller Äquivalenzklassen X ergibt, gibt es eine Äquivalenzklasse x_α mit $x_\alpha \in \underline{U}$. Da die Äquivalenzklassen disjunkt sind, ist x_α eindeutig bestimmt. Das so konstruierte $x_{\underline{U}} = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist ein Faden in X_∞ : Sei $\alpha, \beta \in A$ und $\alpha \sim \beta$. Dann ist $x_\alpha, x_\beta \in \underline{U}$, also $x_\alpha \sim x_\beta \neq \emptyset$. Wegen $F_\alpha \leq F_\beta$ heißt das $x_\alpha \leq x_\beta$ und damit $\prod_\beta^*(x_\alpha) = x_\beta$. Die soeben konstruierten Zuordnungen zwischen Fäden aus X_∞ und $\underline{E} \vee \underline{CR}$ -Ultrafiltern sind ersichtlich invers zueinander und lassen λ fest (d.h. unter dieser Zuordnung entsprechen Punktfäden den trivialen $\underline{E} \vee \underline{CR}$ -Ultrafiltern). Die genauen Rechnungen seien dem Leser überlassen. Die so gewonnene Bijektion wollen wir mit μ bezeichnen. Auch die Bijektion η aus IV.13. läßt die Punkte aus X fest. Wir zeigen, daß $\mu \cdot \eta: \mathcal{A}(\lambda, \underline{E}) \rightarrow (X_\infty, \tilde{X}_\infty)$ ein Isomorphismus ist: Sei $\tilde{A} \in \underline{E}$. Dann gilt offenbar $\eta[C(\tilde{A})] = \{\underline{U} \mid \underline{U} \text{ ist } \underline{E} \vee \underline{CR}\text{-Ultrafilter und } \tilde{A} \in \underline{U}\}$. Diese Gleichheit ist einfach nachzuweisen, wir berechnen nun $\mu[\eta[C(\tilde{A})]]$. Es ist $\mu \cdot \eta[C(\tilde{A})] = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} \mid (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in X_\infty \wedge \bigvee_{\alpha \in A} x_\alpha \leq \tilde{A}\} = \tilde{A}^*$. Sei nämlich $\mathcal{U}_\alpha$ eine endliche $\underline{E}$ -offene Überdeckung von X , in der $X-\tilde{A}$ vorkommt, dann gilt für $(x_\alpha)_{\alpha \in A} = \bigwedge_{\alpha \in A} x_\alpha \leq \tilde{A}$. Die andere Inklusion ist trivial nach Definition von μ^{-1} . Die Mengen $\tilde{A}^*$, $\tilde{A} \in \underline{E}$, sind aber Basis der abgeschlossenen Mengen von $(X_\infty, \tilde{X}_\infty)$. qed

IV.16. Lemma :

Sei $(X, \underline{X})$ T_C -Raum und $\underline{E}$ Basis-Fing der abgeschlossenen Mengen von $(X, \underline{X})$. Dann sind äquivalent :

- a) $\underline{u}$ ist abgeschlossener Punkt in $\mathcal{A}(X, \underline{E})$.
- b) $\underline{u}$ ist $\underline{E}$ -Ultrafilter.

Peweis: a) $\Rightarrow$ b): Es ist $\{\underline{u}\} = \bigcap_{A \in \underline{u}} C(A)$. Sei $B \in \underline{E}$ und $B \cap A \neq \emptyset$ für alle $A \in \underline{u}$, d.h. $C(B) \cap C(A) \neq \emptyset$ für alle $A \in \underline{u}$. Damit ist $\{C(B)\} \cup \{C(A) \mid A \in \underline{u}\}$ eine Familie abgeschlossener Mengen mit endlicher Durchschnittseigenschaft. Da $\mathcal{A}(X, \underline{E})$ quasikompakt ist, gilt $C(B) \cap \bigcap_{A \in \underline{u}} C(A) \neq \emptyset$, daraus folgt $\underline{u} \in C(B)$ und $B \in \underline{u}$.

b) $\Rightarrow$ a): Angenommen es gibt ein von $\underline{u}$ verschiedenes $\underline{v}$ in $\bigcap_{A \in \underline{u}} C(A) \supseteq \{\underline{u}\}$. Da $\mathcal{A}(X, \underline{E})$ T_0 -Raum ist, gibt es ein $B \in \underline{E}$ mit $\underline{v} \in C(B)$ und $\underline{u} \notin C(B)$. Es ist aber $C(B) \cap C(A) \neq \emptyset$ und damit auch $B \cap A \neq \emptyset$ für alle $A \in \underline{u}$. Es folgt $B \in \underline{u}$ im Widerspruch zu $\underline{u} \notin C(B)$. qed

IV.17. Bemerkung :

Sei $(X, \underline{X})$ T_1 -Raum und $\underline{E}$ ein disjunktiver Basis-Ring der abgeschlossenen Mengen von $(X, \underline{X})$. Dann ist nach IV.15. $\mu \circ \eta : \mathcal{A}(X, \underline{E}) \longrightarrow (X_\infty, \underline{X}_\infty)$ ein Homöomorphismus. Selbstverständlich bildet er abgeschlossene Punkte auf abgeschlossene Punkte ab. Die Wallman- T_1 -Quasikompaktifizierung $\mathcal{W}(X, \underline{E})$ von $(X, \underline{X})$ ist wegen IV.16. also isomorph zum Teilraum aller abgeschlossenen Punkte von $(X_\infty, \underline{X}_\infty)$.

Viele Theoreme in der Allgemeinen Topologie werden mit

Hilfe inverser Limites bewiesen. IV.15. ist nun ein Bindeglied zwischen zwei Konstruktionsverfahren der Mengentheoretischen Topologie.

IV.18. Satz :

Jeder totalunzusammenhängende kompakte metrisierbare Raum $(X, \underline{X}_d)$ ist isomorph zum inversen Limes $(Y_\omega, \underline{Y}_\omega)$ einer Folge $Y_0 \longleftarrow Y_1 \longleftarrow Y_2 \longleftarrow \dots$ endlicher diskreter Räume.

Beweis: $(X, \underline{X}_d)$ ist nulldimensional. Es gibt einen abzählbaren Basis-Ring $\underline{E}$ aus offen-abgeschlossenen Mengen. Dann ist o.B.d.A. $\underline{E} = \underline{C}\underline{E}$ und

$$(X, \underline{X}_d) \cong \mathcal{NO}(X, \underline{E}) \cong \mathcal{A}(X, \underline{E}) \cong (Y_\omega, \underline{Y}_\omega) .$$

Man beachte, daß es wegen der Abzählbarkeit von $\underline{E}$ in der durch die Inklusion geordneten Menge aller endlichen $\underline{E}$ -offenen Überdeckungen von X eine linear geordnete konfinale Teilmenge gibt. qed

IV.19. Satz :

Jeder kompakte metrische Raum ist stetiges Bild des Cantorsche Diskontinuums.

Beweis: Bezeichne C das Cantorsche Diskontinuum. Es existiert ein abzählbarer Basis-Ring $\underline{E}$ der abgeschlossenen Mengen des kompakten metrisierbaren Raumes $(X, \underline{X}_d)$. Wir definieren einen Raum X^* , indem wir die Grundmenge X beibehalten, aber als Basis der abgeschlossenen Mengen $\underline{E}^* = \underline{E} \cup \underline{C}\underline{E}$ wählen. $\mathcal{NO}(X, \underline{E}^*)$ ist kompakt, metrisierbar und totalunzusammenhängend, leider im allgemeinen nicht perfekt. $C \times \mathcal{NO}(X, \underline{E}^*)$ ist zusätzlich perfekt und damit iso-

morph zu C . Sei $\text{id}: X^* \rightarrow X$ die Identität auf X .
 Folgendes Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}
 X^* & \subseteq & \mathcal{M}(X, \underline{E}^*) \cong \mathcal{A}(X, \underline{E}^*) \\
 \text{id} \downarrow & \swarrow \text{id}^* & \\
 X & \cong & \mathcal{M}(X, \underline{E})
 \end{array}$$

Die stetige Fortsetzung id^* von id auf $\mathcal{M}(X, \underline{E}^*)$
 existiert nach dem Fortsetzungssatz von Taimanov.

Schließlich ist $C \cong C \times \mathcal{M}(X, \underline{E}^*) \xrightarrow{p} \mathcal{M}(X, \underline{E}^*) \xrightarrow{\text{id}^*} X$. qed

5. Fortsetzung stetiger Funktionen

V.1.Bemerkung :

Wir haben im vorigen Kapitel das Wallman-Verfahren mit Hilfe von Proximitäts-Räumen, Uniformen Räumen und inversen Limites dargestellt. In diesen Gebieten sind aber Theoreme über die Fortsetzbarkeit von Morphismen gut bekannt. Aus der Theorie der Proximitätsräume benötigen wir folgendes Ergebnis: Sei $(Y, \underline{Y})$ kompakt, (X, δ) hausdorffscher Proximitätsraum und (X^*, δ^*) die Smirnov-Kompaktifizierung von (X, δ) . Die Abbildung $f: (X, \delta) \longrightarrow (Y, \underline{Y})$ besitzt genau dann eine eindeutige stetige Fortsetzung $\bar{f}: (X^*, \delta^*) \longrightarrow (Y, \underline{Y})$, wenn f p -stetig ist. Aus der Theorie der Uniformen Räume benötigen wir folgendes Ergebnis: Sei $(Y, \underline{U})$ hausdorffscher vollständiger Uniformer Raum, $(X, \underline{V})$ hausdorffscher Uniformer Raum und $(\hat{X}, \hat{V})$ die Vervollständigung von $(X, \underline{V})$. Die Abbildung $f: (X, \underline{V}) \longrightarrow (Y, \underline{U})$ besitzt genau dann eine eindeutige gleichmäßig stetige Fortsetzung $\bar{f}: (\hat{X}, \hat{V}) \longrightarrow (Y, \underline{U})$, wenn f gleichmäßig stetig ist. Aus der Theorie der Grenzzräume inverser Zerlegungsspektren benötigen wir folgendes Ergebnis: Sei $(X_\infty, \underline{X}_\infty)$ der Grenzzraum eines vollständigen fundamentalen Zerlegungsspektrums des T_0 -Raumes $(X, \underline{X})$. Dann läßt sich jede stetige Abbildung von $(X, \underline{X})$ in einen kompakten topologischen Raum stetig auf $(X_\infty, \underline{X}_\infty)$ fortsetzen.

Der letzte Satz ist für uns nicht ohne weiteres verwertbar, da wir es im allgemeinen nicht mit vollständigen Zerlegungsspektren zu tun haben.

V.2. Satz :

Sei $(X, \underline{X})$ T_1 -Raum und $\underline{E}$ ein normaler Ring von X . Dann ist jede endliche $\underline{E}$ -offene Überdeckung von X Proximitätsüberdeckung (bzgl. der in IV.3. eingeführten Relation).

Beweis: Sei $\bigcup_{i=1}^n O_i = X$, $X - O_i \in \underline{E}$ für $1 \leq i \leq n$. Z.z.: Es existiert $A_1 \subseteq X$ mit $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$ und $A_i \subseteq O_i$, $1 \leq i \leq n$.

Induktionsbeweis: Sei $O_1 \cup O_2 = X$, $X - O_1, X - O_2 \in \underline{E}$. Dann ist $X - O_1 \cap X - O_2 = \emptyset$. Es existiert $A, B \in \underline{E}$ mit $X - O_1 \subseteq X - A$, $X - O_2 \subseteq X - B$ und $X - A \cap X - B = \emptyset$, also $A \subseteq O_1$, $B \subseteq O_2$ und $A \cup B = X$.

Sei $O_1 \cup \dots \cup O_n = X$, $X - O_i \in \underline{E}$, $1 \leq i \leq n$. Es ist $(O_1 \cup O_2) \cup O_3 \cup \dots \cup O_n$ $\underline{E}$ -offene Überdeckung von X mit $n-1$ Elementen. Also existiert $A_2, A_3, \dots, A_n \in \underline{E}$ mit $A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = X$ und $A_2 \subseteq O_1 \cup O_2$, $A_i \subseteq O_i$, $3 \leq i \leq n$. Wegen $A_2 \subseteq O_1 \cup O_2$ ist $A_2 \cap X - (O_1 \cup O_2) = \emptyset$, also $A_2 \cap X - O_1 \cap A_2 \cap X - O_2 = \emptyset$. Es existiert $C, D \in \underline{E}$ mit $A_2 \cap X - O_1 \subseteq X - C$, $A_2 \cap X - O_2 \subseteq X - D$ und $X - C \cap X - D = \emptyset$. Also $C \subseteq X - A_2 \cup O_1$, $D \subseteq X - A_2 \cup O_2$ und $C \cup D = X$. Dann ist $C \cap A_2 \subseteq O_1$, $D \cap A_2 \subseteq O_2$, $C \cap A_2, D \cap A_2 \in \underline{E}$ und $C \cap A_2 \cup D \cap A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = X$. Es ist natürlich $C \cap A_2 \subseteq O_1$, $D \cap A_2 \subseteq O_2$, $A_i \subseteq O_i$, $3 \leq i \leq n$. qed

V.3. Definition :

Sei $(X, \underline{X})$ T_1 -Raum und $\underline{E}$ ein normaler Ring von X .

a) Sei $(Y, \underline{Y})$ kompakter Raum. Die Abbildung

$f: (X, \underline{X}) \longrightarrow (Y, \underline{Y})$ heißt $\underline{E}$ -proximal stetig, wenn f bzgl. der in IV.4.a) eingeführten Proximität $\delta_{\underline{E}}$ p -stetig ist.

b) Sei $(Y, \underline{Y})$ kompakter Raum. Die Abbildung $f: (X, \underline{X}) \longrightarrow (Y, \underline{Y})$ heißt $\underline{E}$ -gleichmäßig stetig, wenn zu jeder endlichen offenen Überdeckung $\mathcal{W}$ von Y eine endliche $\underline{E}$ -offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X existiert mit $f[\mathcal{U}] \subseteq \mathcal{W}$.

V.4. Satz :

Sei $(X, \underline{X})$ T_1 -Raum, $\underline{R}$ normaler Ring von X und $(Y, \underline{Y})$ ein kompakter Raum. Sei $f: (X, \underline{X}) \longrightarrow (Y, \underline{Y})$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

a) Es existiert eine stetige Fortsetzung $\bar{f}: \mathcal{M}(\lambda, \underline{R}) \longrightarrow (Y, \underline{Y})$ von f auf $\mathcal{M}(X, \underline{R})$.

b) Sind A, B disjunkte abgeschlossene Mengen von $(Y, \underline{Y})$, dann gibt es $F, G \in \underline{R}$ mit $F \cap G = \emptyset$ und $f^{-1}[A] \subseteq F$, $f^{-1}[B] \subseteq G$.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Sei A, B abgeschlossen und disjunkt, dann sind auch $\bar{f}^{-1}[A]$, $\bar{f}^{-1}[B]$ abgeschlossen und disjunkt. Da $\mathcal{M}(X, \underline{R})$ kompakt und $\{\bar{F} \in \mathcal{M}(X, \underline{R}) \mid F \in \underline{R}\}$ Basis ist, gibt es $F, G \in \underline{R}$ mit $\bar{F} \cap \bar{G} = \emptyset$ und $\bar{f}^{-1}[A] \subseteq \bar{F}$, $\bar{f}^{-1}[B] \subseteq \bar{G}$. Dann ist $f^{-1}[A] \subseteq F$, $f^{-1}[B] \subseteq G$, $F \cap G = \emptyset$.

b) $\Rightarrow$ a): Wegen der unter V.1. zitierten Ergebnisse genügt es zu zeigen, daß f $\underline{E}$ -proximal stetig ist. Sei $C, D \subseteq Y$ und $C \not\subseteq D$, d.h. $\bar{C} \cap \bar{D} \neq \emptyset$. Dann ist auch $f^{-1}[\bar{C}] \cap f^{-1}[\bar{D}] \neq \emptyset$. Wegen IV.6. sind wir fertig. qed

V.2. Satz :

Sei $(\Lambda, \underline{\lambda})$ T_1 -Raum und $\underline{F}$ normaler Ring von X . Dann bilden alle endlichen offenen Überdeckungen aus $\underline{F}$ -offenen Mengen eine Basis der von $\mathcal{M}(X, \underline{F})$ auf X induzierten totalbeschränkten Uniformität. Die Vervollständigung dieses Uniformen Raumes ist wieder $\mathcal{M}(X, \underline{F})$.

Beweis: Satz V.2. liefert, daß jede endliche $\underline{F}$ -offene Überdeckung uniforme Überdeckung ist, bzgl. der eindeutig durch eine Proximität bestimmten totalbeschränkten Uniformität. Die Vervollständigung ist isomorph zur Smirnov-Kompaktifizierung und damit zu $\mathcal{M}(X, \underline{F})$. qed

V.6. Satz :

Sei $(X, \underline{X})$ T_1 -Raum, $\underline{F}$ normaler Ring von X und $(Y, \underline{Y})$ ein kompakter Raum. Sei $f : (X, \underline{X}) \longrightarrow (Y, \underline{Y})$ eine Abbildung. Dann sind Äquivalent:

- a) Es existiert eine stetige Fortsetzung $\bar{f} : \mathcal{M}(X, \underline{F}) \longrightarrow (Y, \underline{Y})$ von f auf $\mathcal{M}(X, \underline{F})$.
- b) f ist $\underline{F}$ -gleichmäßig stetig.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Sei $\mathcal{U}$ endliche offene Überdeckung von Y . Dann ist $\bar{f}^{-1}(\mathcal{U})$ endliche offene Überdeckung von $\mathcal{M}(X, \underline{F})$. Da $\{\bar{F} \mid \bar{F} \in \underline{F}\}$ Basis der abgeschlossenen Mengen des kompakten Raumes $\mathcal{M}(X, \underline{F})$ ist, gibt es eine endliche offene Überdeckung $\{\mathcal{M}(X, \underline{F}) - \bar{F}_i \mid \bar{F}_i \in \underline{F}, i \in \{1, \dots, n\}\}$ die $\bar{f}^{-1}(\mathcal{U})$ verfeinert. Die Spur dieser Überdeckung auf X leistet das Gewünschte.

b) $\Rightarrow$ a): Nach V.1. und V.5. existiert eine Fort-

setzung $\bar{f} : \mathcal{M}(\lambda, \underline{R}) \longrightarrow (Y, \underline{Y})$, da f $\underline{R}$ -gleichmäßig stetig ist. qed

V.7. Bemerkung :

Es ist ein zu V.4. analoger Fortsetzungssatz für inverse Grenträume möglich. Jedoch können wir nicht mehr die Theorie der Proximitätsräume heranziehen, sondern verwenden IV.15. und folgendes Ergebnis: Sei $(X, \underline{X})$ topologischer Raum, A eine dichte Teilmenge von X und $(Y, \underline{Y})$ kompakt. Dann ist eine stetige Abbildung $f: (A, \underline{X}_A) \longrightarrow (Y, \underline{Y})$ genau dann auf X fortsetzbar, wenn für je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen A, B von Y auch $\overline{f^{-1}[A]}^X, \overline{f^{-1}[B]}^X$ disjunkt sind.

V.8. Satz :

Sei $(X, \underline{X})$ T_0 -Raum und $\underline{R}$ ein Basis-Ring der abgeschlossenen Mengen von $(X, \underline{X})$. Sei $(Y, \underline{Y})$ kompakt und $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

- f besitzt eine stetige Fortsetzung $\bar{f}: (X_\infty, \underline{X}_\infty) \longrightarrow (Y, \underline{Y})$, dabei bezeichnet $(X_\infty, \underline{X}_\infty)$ den Grenzraum des in IV.14. eingeführten Zerlegungsspektrums.
- Für je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen A, B von Y existieren disjunkte Mengen $R, S \in \underline{R}$ mit $f^{-1}[A] \subseteq R$, $f^{-1}[B] \subseteq S$.

Beweis: Trivial mit V.7. und IV.11.b). qed

V.9. Definition :

Seien $(X, \underline{X}), (Y, \underline{Y})$ T_1 -Räume und $\underline{R}$ bzw. $\underline{S}$ disjunktive Basis-

Ringe abgeschlossener Mengen von $(X, \underline{X})$ bzw. $(Y, \underline{Y})$. Ist $f : (X, \underline{X}) \longrightarrow (Y, \underline{Y})$ stetig, dann heißt ein stetiges $f^w : \mathcal{M}(X, \underline{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(Y, \underline{S})$ Wallman-Fortsetzung von f , wenn gilt $f^w \circ \mathcal{P}_X = \mathcal{P}_Y \circ f$. Dabei ist $\mathcal{P}_X$ bzw. $\mathcal{P}_Y$ die in Kapitel II untersuchte Einbettung.

V.10. Definition :

Seien $(X, \underline{X})$, $(Y, \underline{Y})$ T_1 -Räume und $\underline{R}$ bzw. $\underline{S}$ disjunktive Basis-Ringe von $(X, \underline{X})$ bzw. $(Y, \underline{Y})$. Eine Abbildung $f : (X, \underline{X}) \longrightarrow (Y, \underline{Y})$ heißt w -gleichmäßig stetig, wenn gilt: Zu jeder endlichen $\underline{S}$ -offenen Überdeckung $\mathcal{W}$ von Y gibt es eine endliche $\underline{R}$ -offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X , so daß gilt: Ist $U \in \mathcal{U}$, dann gibt es ein $V \in \mathcal{W}$, so daß für alle $R \in \underline{R}$ mit $R \subseteq U$ ein $S_R \in \underline{S}$ existiert mit $f[R] \subseteq S_R \subseteq V$. Für diesen Sachverhalt wollen wir $\mathcal{U} \subseteq_f \mathcal{W}$ schreiben.

V.11. Lemma :

Seien $(X, \underline{X})$, $(Y, \underline{Y})$ T_1 -Räume und $\underline{R}$ bzw. $\underline{S}$ disjunktive Basis-Ringe von $(X, \underline{X})$ bzw. $(Y, \underline{Y})$. Sei $\mathcal{U}(\mathcal{W})$ eine endliche $\underline{R}$ -offene ($\underline{S}$ -offene) Überdeckung von X (Y) und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- Gilt $\mathcal{U} \subseteq_f \mathcal{W}$, dann gilt $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{W}$.
- Ist $f: (X, \underline{X}) \longrightarrow (Y, \underline{Y})$ w -gleichmäßig stetig, dann ist f auch stetig.

Beweis: a) Zu $U \in \mathcal{U}$ gibt es $V \in \mathcal{W}$, so daß für $R \in \underline{R}$ mit $R \subseteq U$ ein $S \in \underline{S}$ existiert mit $f[R] \subseteq S \subseteq V$. Sei $x \in U$. Wegen $x - U \in \underline{R}$ und $x \notin x - U$ gibt es $R' \in \underline{R}$ mit $x \in R'$

und $R' \cap X-U = \emptyset$. Also $x \in R' \subseteq U$. Es gibt $S' \in \underline{S}$ mit $f[F'] \subseteq S' \subseteq V$, jedenfalls ist $f(x) \in f[F'] \subseteq V$, d.h. $f[U] \subseteq V$.

b) Sei $x \in X$ und $V \in \underline{U}(f(x))$. Es gibt $S_1, S_2 \in \underline{S}$ mit $x \in S_1$, $Y-V \subseteq S_2$ und $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Dann ist $\{Y-S_1, Y-S_2\} = \alpha$ eine endliche $\underline{S}$ -offene Überdeckung von Y . Es gibt eine endliche $\underline{F}$ -offene Überdeckung $\mathcal{L}$ von X mit $\mathcal{L} \subseteq_f \alpha$. Es ist $x \in U$ für ein $U \in \mathcal{U}$ und damit wegen a) $f(x) \in f[U] \subseteq Y-S_2 \subseteq V$. qed

V.12. Satz :

Seien $(X, \underline{X})$, $(Y, \underline{Y})$ T_1 -Räume und $\underline{R}$ bzw. $\underline{S}$ disjunktive Basis-Ringe von $(X, \underline{X})$ bzw. $(Y, \underline{Y})$. Dann besitzt jede w -gleichmäßig stetige Abbildung $f : (X, \underline{X}) \longrightarrow (Y, \underline{Y})$ genau eine w -gleichmäßig stetige Wallman-Fortsetzung $f^w : \mathcal{M}(X, \underline{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(Y, \underline{S})$.

Beweis: Sei $f : X \longrightarrow Y$ w -gleichmäßig stetig und $\underline{u} \in \mathcal{M}(X, \underline{R})$. Dann ist $K = \bigcap_{U \in \underline{u}} \overline{f[U]} \mathcal{M}(Y, \underline{S})$ einelementig.

Angenommen es gibt $\underline{v}, \underline{w} \in K$ und $\underline{v} \neq \underline{w}$. Dann existieren $A \in \underline{v}$, $B \in \underline{w}$ mit $A \cap B = \emptyset$. $\{Y-A, Y-B\}$ ist eine endliche $\underline{S}$ -offene Überdeckung von Y . Es gibt eine endliche $\underline{F}$ -offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X mit $\mathcal{U} \subseteq_f \{Y-A, Y-B\}$. Es gibt ein $F \in \underline{u}$ und ein $U \in \mathcal{U}$ mit $F \subseteq U$. Andernfalls wäre für alle $U \in \mathcal{U}$ nämlich $X-U \in \underline{u}$ und damit $\bigcap_{U \in \underline{u}} X-U \neq \emptyset$. Es gibt $S \in \underline{S}$ mit o.B.d.A. $f[F] \subseteq S \subseteq Y-A$. Dann ist $\overline{f[F]} \subseteq \overline{S}$ und $\overline{S} \cap \overline{A} = \emptyset$. Das heißt aber $\underline{v} \notin \overline{S}$ und damit $\underline{v} \notin \overline{f[F]}$, Widerspruch. Definiere nun $f^w : \mathcal{M}(X, \underline{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(Y, \underline{S})$ durch $f^w(\underline{u}) \in K$ für alle $\underline{u} \in \mathcal{M}(X, \underline{R})$. f^w ist stetig:

Sei $\mathcal{M}(Y, \underline{S}) - \overline{S}$, $S \in \underline{S}$, eine Umgebung von $f^W(\underline{u})$. Es gibt $\underline{U} \in \underline{u}$, $T \in \underline{t}$ mit $\overline{f[\underline{U}]} \subseteq \overline{T}$ und $T \cap S = \emptyset$. $\{Y - T, Y - S\}$ ist $\underline{S}$ -offene Überdeckung von Y . Es gibt eine endliche $\underline{R}$ -offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X mit $\mathcal{U} \subseteq_f \{Y - T, Y - S\}$. Es gibt ein $G \in \underline{u}$ und ein $V \in \mathcal{U}$ mit $G \subseteq V$. Dann ist $\underline{u} \notin \overline{X - U}$, also $\underline{u} \in \mathcal{M}(X, \underline{R}) - \overline{X - U}$. Es ist $f[\underline{U}] \subseteq T$. Sei nun $\underline{z} \in \mathcal{M}(X, \underline{R}) - \overline{X - U}$. Es gibt $Z \in \underline{z}$ mit $Z \subseteq U$ und $S' \in \underline{S}$ mit $f[Z] \subseteq S' \subseteq Y - S$. Es folgt $\overline{f[Z]} \cap \overline{S} = \emptyset$, und $f^W(\underline{z}) \in \overline{f[Z]} \subseteq \mathcal{M}(Y, \underline{S}) - \overline{S}$.

$f^W: \mathcal{M}(X, \underline{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(Y, \underline{S})$ ist w -gleichmäßig stetig (bzgl. der Ringe $\{\overline{f[\mathcal{M}(X, \underline{R})]} \mid \underline{R} \in \underline{R}\}$ und $\{\overline{S} \mid \underline{S} \in \underline{S}\}$): Sei $\mathcal{W}' = \{\mathcal{M}(Y, \underline{S}) - \overline{S}_i \mid S_i \in \underline{S}, i \in \{1, \dots, n\}\}$ eine Überdeckung von $\mathcal{M}(Y, \underline{S})$. Dann ist $\mathcal{W} = \{Y - S_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ eine Überdeckung von Y . Es gibt eine $\underline{R}$ -offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{X - R_j \mid j \in \{1, \dots, m\}\}$ von X mit $\mathcal{U} \subseteq_f \mathcal{W}$. Es ist $\mathcal{U}' = \{\mathcal{M}(X, \underline{R}) - \overline{R}_j \mid j \in \{1, \dots, m\}\}$ eine Überdeckung von $\mathcal{M}(X, \underline{R})$. Wir zeigen $\mathcal{U}' \subseteq_f \mathcal{W}'$. Sei $F \in \underline{R}$ und $\overline{F} \subseteq \mathcal{M}(X, \underline{R}) - \overline{R}_j$, also $F \subseteq X - R_j$ und $f[F] \subseteq S \subseteq Y - S_k$ für geeignete $S \in \underline{S}$, S_k , $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist $f^W[\overline{F}] \subseteq \overline{f[F]} = \overline{f[F]} \subseteq \mathcal{M}(Y, \underline{S}) - \overline{S}_k$. f^W ist eindeutig: Sei auch g^W Wallman-Fortsetzung von f und $\underline{u} \in \mathcal{M}(X, \underline{R})$. Es ist $\{\underline{u}\} = \bigcap_{\underline{U} \in \underline{u}} \overline{\mathcal{M}(X, \underline{R})}$ und $g^W(\underline{u}) \in g^W[\bigcap_{\underline{U} \in \underline{u}} \overline{\mathcal{M}(X, \underline{R})}] \subseteq \bigcap_{\underline{U} \in \underline{u}} g^W[\overline{\mathcal{M}(X, \underline{R})}] \subseteq \bigcap_{\underline{U} \in \underline{u}} \overline{g^W[\underline{U}]} = \bigcap_{\underline{U} \in \underline{u}} \overline{f[\underline{U}]} = \{f^W(\underline{u})\}$. qed

V.13. Satz :

Sei $(X, \underline{X})$ T_1 -Raum und $\underline{R}$ Basis-Ring von $(X, \underline{X})$. Dann ist

$$\varphi: (X, \underline{X}) \longrightarrow \mathcal{M}(X, \underline{R}) \text{ } w\text{-gleichmäßig stetig.}$$

Beweis: Sei $\{\mathcal{M}(X, \underline{R}) - \overline{R}_i \mid R_i \in \underline{R}, i \in \{1, \dots, n\}\}$ Überdeckung

von $\mathcal{M}(Y, \underline{L})$. Dann ist $\{X - R_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ Überdeckung
 von X . Sei $F \in \underline{R}$ und $R \in X - R_i$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$.
 Dann ist $F \in \overline{R} \in \mathcal{M}(X, \underline{R}) - \overline{R}_i$. qed

6. Ergebnisse

VI.1. Definition :

Sei $(\hat{X}, \underline{X})$ T_1 -quasikompakter Raum. $A \in X$ heißt regulär abgeschlossen, wenn $\overline{A^0} = A$ gilt. $(\hat{X}, \underline{X})$ heißt regulär wallman- T_1 -quasikompakt, wenn ein disjunktiver Basis-Ring $\hat{R}$ aus regulär abgeschlossenen Mengen von $(\hat{X}, \underline{X})$ existiert.

VI.2. Lemma :

Sei $((X_i, \underline{X}_i))_{i \in I}$ eine Familie von T_1 -Räumen mit disjunktiven Basis-Ringen $(\underline{R}_i)_{i \in I}$ aus regulär abgeschlossenen Mengen. Dann besitzt auch das Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ einen Basis-Ring aus regulär abgeschlossenen Mengen.

Beweis: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

VI.3. Definition :

Sei $(X, \underline{X})$ T_1 -Raum. $\underline{R}$ ein disjunktiver Basis-Ring abgeschlossener Mengen von $(X, \underline{X})$. Dann heißt $\text{wo}(X, \underline{R})$ Wallman-Z- T_1 -Quasikompaktifizierung von X , wenn $\underline{R}$ aus Nullstellenmengen stetiger reellwertiger Funktionen besteht.

VI.4. Satz :

Sei $(\hat{X}, \underline{X})$ regulär Wallman- T_1 -quasikompakt. Dann ist $(\hat{X}, \underline{X})$ Wallman- T_1 -Quasikompaktifizierung jeder dichten Teilmenge von X .

Beweis: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

VI.5. Satz :

Sei $(X, \underline{X})$ T_1 -Raum und $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ T_1 -Quasikompaktifizierung von $(X, \underline{X})$. Dann sind äquivalent:

- a) $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ ist Wallman- T_1 -Quasikompaktifizierung von $(X, \underline{X})$.
 b) Es existiert ein fundamentales Zerlegungsspektrum mit Äquivalenzrelationen $(\hat{R}_i)_{i \in I}$ von $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ und $\hat{R}_i(\hat{x}) \cap X \neq \emptyset$ für alle $(\hat{x}, i) \in \hat{X} \times I$.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Sei $\hat{X} = \mathcal{MO}(X, \underline{E})$ und $\hat{\underline{R}} = \{ \bar{R}^{\hat{X}} / R \in \underline{R} \}$. $\hat{\underline{R}}$ ist ein disjunktiver Basis-Ring von $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ und liefert gemäß IV.14. ein fundamentales Zerlegungsspektrum von $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ mit Äquivalenzrelationen $(\hat{R}_i)_{i \in I}$. Sei $\hat{x} \in \hat{X}$ und $i \in I$. Dann gilt $\hat{R}(\hat{x}) = \bar{T} \cap \hat{X} - \bar{S}$ für geeignete $S, T \in \underline{E}$. Ansonst $\emptyset = \bar{T} \cap \hat{X} - \bar{S} \cap X = T \cap \hat{X} - \bar{S}$. Dann folgt $S \in \bar{T}$ und $\bar{T} \in \bar{S}$. Widerspruch zu $\hat{x} \in \bar{T} \cap \hat{X} - \bar{S}$.

b) $\Rightarrow$ a): Sei $\{ \hat{X}_i, \pi_j^i \}_{i, j \in I}$ ein fundamentales Zerlegungsspektrum von $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$. Definiere $\hat{\underline{R}} = \{ R / R \in \hat{\underline{X}} \wedge \bar{R} = R \wedge \bigvee_{i \in I} \hat{R}_i[R] = R \}$. $\hat{\underline{R}}$ ist ein Ring, weil I gerichtet ist und Basis der abgeschlossenen Mengen. $\hat{\underline{R}}$ ist auch X -dicht: Sei $R \in \hat{\underline{R}}$ und $\hat{x} \in R$. Es gibt ein $i \in I$ mit $\hat{R}_i(\hat{x}) \in \hat{R}_i[R] = R$, dann ist $\emptyset \neq \hat{R}_i(\hat{x}) \cap X \in R \cap X$. Man beachte nun III.5. und III.6.b). qed

VI.6. Satz :

Sei $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ T_1 -quasikompakter Raum. Dann sind äquivalent:

- a) $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ ist regulär Wallman T_1 -quasikompakt.
 b) Es existiert ein fundamentales Zerlegungsspektrum $\{ \hat{X}_i, \pi_j^i \}_{i, j \in I}$ von $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ mit der Eigenschaft $\hat{R}(\hat{x})^0 \neq \emptyset$ für alle Äquivalenzrelationen $\hat{R}_i$, $i \in I$, $\hat{x} \in \hat{X}$.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Sei $\hat{R}$ Basis-Ring aus regulär abgeschlossenen Mengen. Sei $\hat{S}, T \in \hat{R}$ und $S \hat{\cap} X - T \neq \emptyset$. Dann ist $\hat{X} - T \hat{\cap} S$ eine nichtleere offene Menge in S . S^0 ist dicht in S , also gilt $(S \hat{\cap} X - T)^0 \neq \emptyset$.

b) $\Rightarrow$ a): Sei $R \in \hat{X}$, $\bar{R} = R$ und $\hat{R}_i[R] = R$ für ein $i \in I$. Sei $\hat{x} \in R - R^0$ und $U \in \underline{U}(\hat{x})$. Es gibt ein $j \in I$ und $V \in \underline{U}(\hat{x})$ mit $\hat{R}_j[V] = V$ und $V \leq U$. Wähle $k \in I$ mit $k \geq i, j$. Dann ist $\hat{R}_k(\hat{x}) \leq V$ und $\hat{R}_k(\hat{x}) \leq R$. Wegen $(\hat{R}_k(\hat{x}))^0 \neq \emptyset$ gilt $\hat{R}_k(\hat{x}) \cap R^0 \neq \emptyset$ und damit $U \cap R^0 \neq \emptyset$. D.h. $\hat{x} \in \bar{R}^0$. qed

VI.7. Definition :

Sei $(X, \underline{X})$ vollständig regulär und $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ eine Kompaktifizierung von $(X, \underline{X})$.

a) Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller stetigen reellwertigen Funktionen auf X , die eine stetige Fortsetzung auf $\hat{X}$ besitzen. Sei $Z(\mathcal{A})$ die Menge aller Nullmengen von Abbildungen aus $\mathcal{A}$ und $\bar{f}$ die Fortsetzung von $f \in \mathcal{A}$. Für

$\Omega \in \hat{X} - X$ sei $\mathcal{A}_\Omega = \left\{ f \mid f \in \mathcal{A}, \bigwedge_{t \in \Omega} \bigvee_{U_t \in \underline{U}(t)} \bar{f} \text{ ist konstant auf } U_t \right\}$. Sei $Z(\mathcal{A}_\Omega)$ die Menge der dazugehörigen Nullmengen.

b) Eine Teilmenge Ω aus dem Inkrement $\hat{X} - X$ von X heißt wesentlich für einen Mengenring $\underline{R}$ von X , wenn für alle $A, B \in \underline{R}$ mit $A \cap B = \emptyset$ aus $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$ auch $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \Omega \neq \emptyset$ folgt. $Y \in \hat{X}$ heißt nulldimensional eingebettet in $\hat{X}$, wenn $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ eine Basis $\underline{B}$ der offenen Mengen besitzt, so daß aus $B \in \underline{B}$ folgt $\delta B \in \hat{X} - Y$.

Es gibt genau eine stetige, abgeschlossene, surjektive Abbildung $i_\beta : \beta(X) \rightarrow \hat{X}$, die auf X die Identität ist.

$\hat{x} \in \hat{X}$ heißt Multipelpunkt, wenn $i_p^{-1}(\hat{x})$ mehr als einen Punkt enthält.

$Y \subseteq \hat{X}$ heißt normal eingebettet in $\hat{X}$, wenn zwei vollständig separierte Teilmengen von Y auch vollständig separiert in $\hat{X}$ sind.

VI.8. Satz :

Sei $(\hat{X}, \hat{X})$ Kompaktifizierung von (X, X) . Sei $\Omega \in \hat{X} - X$ abgeschlossen und wesentlich für $Z(\alpha_\Omega)$. Dann sind äquivalent:

- a) $\hat{X} = \mathcal{M}_\Omega(X, Z(\alpha_\Omega))$.
- b) Ω ist totalunzusammenhängend.

Beweis: Wir benutzen III.9.. b) $\Rightarrow$ a): Sei $Z(f), Z(g) \in Z(\alpha_\Omega)$, $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$ und $\overline{Z(f)} \cap \overline{Z(g)} \neq \emptyset$. Wegen $\overline{Z(f)} \in Z(\bar{f})$ und $\overline{Z(g)} \in Z(\bar{g})$ ist auch $Z(\bar{f}) \cap Z(\bar{g}) \neq \emptyset$. Es ist $\delta Z(\bar{f}) \in \hat{X} - \Omega$, $\delta Z(\bar{g}) \in \hat{X} - \Omega$ und für ein $x \in \Omega$ $x \in Z(\bar{f}) \cap Z(\bar{g})$. x kann demnach nicht im Rand von $Z(\bar{f})$ und $Z(\bar{g})$ liegen, also $x \in Z(\bar{f})^0 \cap Z(\bar{g})^0$. Wegen $\emptyset \neq Z(\bar{f})^0 \cap Z(\bar{g})^0 \cap X \subseteq Z(\bar{f}) \cap Z(\bar{g}) \cap X = Z(f) \cap Z(g)$ folgt ein Widerspruch. Sei nun $t_1, t_2 \in \hat{X}$, $t_1 \neq t_2$. Wir unterscheiden o.B.d.A. drei Fälle:
 1) $t_1, t_2 \in \hat{X} - \Omega$, 2) $t_1 \in \hat{X} - \Omega$, $t_2 \in \Omega$, 3) $t_1, t_2 \in \Omega$.
 1): Es existiert eine offene Umgebung U von Ω mit $t_1, t_2 \notin \bar{U}$. Es gibt $U_1 \in \underline{U}(t_1)$, $U_2 \in \underline{U}(t_2)$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $(U_1 \cup U_2) \cap U = \emptyset$. Es gibt $\bar{f}_1, \bar{f}_2 \in C(\hat{X}, [0, 1])$ mit $\bar{f}_i(t_i) = 1$, $\bar{f}_1[\hat{X} - U_1] = \{0\}$, $\bar{f}_2(t_2) = 0$, $\bar{f}_2[\hat{X} - U_2] = \{0\}$. Dann ist $Z(f_1) \cup Z(f_2) = X$, $t_1 \in \hat{X} - \overline{Z(f_1)}$, $t_2 \in \hat{X} - \overline{Z(f_2)}$, $f_1, f_2 \in \alpha_\Omega$.

2): Es existieren offene Umgebungen U_Ω^1, U_Ω^2 von Ω und $U_1 \in \underline{U}(t_1)$ mit $U_1 \cap \bar{U}_\Omega^1 = \emptyset$, $\bar{U}_\Omega^2 \subseteq U_\Omega^1$. Es gibt $\bar{f}_1, \bar{f}_2 \in C(\hat{X}, [0, 1])$ mit $\bar{f}_1(+_1) = 1$, $\bar{f}_1[\hat{X} - U_1] = 0$. $\bar{f}_2[\hat{X} - U_\Omega^1] = \{0\}$, $\bar{f}_2[\bar{U}_\Omega^2] = \{1\}$. Dann ist $Z(f_1) \cup Z(f_2) = X$, $t_1 \in \hat{X} - \overline{Z(f_1)}$, $t_2 \in \hat{X} - \overline{Z(f_2)}$, $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_\Omega$.

3): Es gibt disjunkte abgeschlossene Mengen A, B in $\hat{X}$ mit $t_1 \in A$, $t_2 \in B$ und $A \cup B = \Omega$. Es gibt offene Umgebungen U_A^1, U_A^2 von A und U_B^1, U_B^2 von B mit $U_A^1 \cap U_B^1 = \emptyset$. $\bar{U}_A^2 \subseteq U_A^1$, $\bar{U}_B^2 \subseteq U_B^1$. Es existieren $\bar{f}_1, \bar{f}_2 \in C(\hat{X}, [0, 1])$ mit $\bar{f}_1[\bar{U}_A^2] = \{1\}$, $\bar{f}_1[\hat{X} - U_A^1] = \{0\}$, $\bar{f}_2[\bar{U}_B^2] = \{1\}$, $\bar{f}_2[\hat{X} - U_B^1] = \{0\}$. Dann ist $Z(f_1) \cup Z(f_2) = X$ und $t_1 \in \hat{X} - \overline{Z(f_1)}$, $t_2 \in \hat{X} - \overline{Z(f_2)}$, $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_\Omega$. Es wurde benutzt, daß ein kompakter total-unzusammenhängender Raum nulldimensional ist.

Bei nun $f, g \in Z(\mathcal{A}_\Omega)$ und $t \in \overline{Z(f)} \cap \overline{Z(g)} = \overline{Z(f) \cap Z(g)}$. Es gibt $h \in Z(\mathcal{A}_\Omega)$ mit $t \in Z(h)^\circ$ und $Z(h) \cap \overline{Z(f) \cap Z(g)} = \emptyset$. Es folgt $t \in Z(h)^\circ \cap \overline{Z(f)} \subseteq \overline{Z(h)^\circ \cap Z(f)} \subseteq \overline{Z(h) \cap Z(f)} = \overline{Z(h) \cap Z(f)}$, $t \in \overline{Z(g)}$ aber $(Z(h) \cap Z(f)) \cap Z(g) = \emptyset$.

a) $\Rightarrow$ b): Die Menge der abgeschlossenen Hüllen von Elementen aus $Z(\mathcal{A}_\Omega)$ trennt die Punkte von $\hat{X}$. Da es für alle $t \in \Omega$, $f \in \mathcal{A}_\Omega$ ein $U_{(f,t)} \in \underline{U}(t)$ gibt, so daß f auf $U_{(f,t)}$ konstant ist, sind alle $f \in \mathcal{A}_\Omega$ auf den Zusammenhangskomponenten von Punkten aus Ω konstant. Das erzwingt die Trivialität der Komponenten. qed

VI.9. Korollar :

Sei $(X, \underline{X})$ lokalkompakt und $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ Kompaktifizierung von $(X, \underline{X})$. Dann sind äquivalent:

a) $\hat{X} = m_0(X, Z(\mathcal{A}_{\hat{X}-\hat{\underline{X}}}))$.

b) $\hat{X}-X$ ist totalunzusammenhängend.

Beweis: Benutze VI.8. mit $\Omega = \hat{X}-X$. qed

VI.10. Korollar :

Sei $(X, \underline{X})$ lokalkompakt, $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ Kompaktifizierung von $(X, \underline{X})$ und $|\hat{X}-X| \leq |\mathbb{N}|$. Dann ist $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ Wallman-Z-Kompaktifizierung von $(X, \underline{X})$. Die Alexandroffsche Einpunktkompaktifizierung X^* von X ist Wallman-Z-Kompaktifizierung von X .

Beweis: Ein abzählbarer vollständig regulärer Raum ist totalunzusammenhängend. qed

VI.11. Satz :

Sei $(X, \underline{X})$ vollständig regulär. Die Stone-Čech-Kompaktifizierung $\beta(X)$ von X ist Wallman-Z-Kompaktifizierung von X .

Beweis: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

VI.12. Lemma :

Sei $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ Kompaktifizierung von $(X, \underline{X})$. Sei $\hat{\underline{F}}$ ein Ring abgeschlossener Mengen und $\underline{F} = \hat{\underline{F}} \cap X = \{ \hat{F} \cap X \mid \hat{F} \in \hat{\underline{F}} \}$. Sei $\Omega \in \hat{X}-X$ wesentlich für $\underline{F}$ und die Ränder von Elementen aus $\hat{\underline{F}}$ in $\hat{X}-\Omega$ enthalten. Dann gilt für $F_1, F_2 \in \underline{F}$ mit $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ auch $\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 = \emptyset$.

Beweis: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

VI.13. Satz :

Sei $\hat{\underline{F}}$ ein Basis-Ring der abgeschlossenen Mengen der Kompaktifizierung $(\hat{X}, \hat{\underline{X}})$ von $(X, \underline{X})$. Gibt es eine wesentliche Teilmenge $\Omega \in \hat{X}-X$ für $\underline{F} = \hat{\underline{F}} \cap X$ und sind alle Ränder von

Elementen aus $\hat{R}$ in $\hat{X} - \Omega$ enthalten, dann gilt $\hat{X} = \mathcal{MO}(X, \underline{R})$.

Beweis: $\underline{R} = \{ \bar{F} \mid F \in \underline{R} \}$ ist Basis der abgeschlossenen Mengen von $(\hat{X}, \hat{X})$. Wegen III.9. und VI.12. gilt $\hat{X} = \mathcal{MO}(X, \underline{R})$. qed

VI.14. Korollar :

Sei $(\hat{X}, \hat{X})$ Kompaktifizierung von $(X, \underline{X})$ und $\hat{X} - X$ nulldimensional in $\hat{X}$ eingebettet. Dann ist $\hat{X}$ Wallman-Kompaktifizierung von X .

Beweis: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

VI.15. Satz :

Sei $(\hat{X}, \hat{X})$ Kompaktifizierung von $(X, \underline{X})$. Sei $\Omega \subseteq \hat{X} - X$ normal und nulldimensional in $\hat{X}$ eingebettet und wesentlich für $Z(\mathcal{A}_\Omega)$. Dann gilt $\hat{X} = \mathcal{MO}(X, Z(\mathcal{A}_\Omega))$.

Beweis: Sei $\underline{R} = \{ Z(\bar{F}) \mid F \in \mathcal{A}_\Omega \}$. Für $F \in \mathcal{A}_\Omega$ gilt $\delta Z(\bar{F}) \subseteq \hat{X} - \Omega$. Außerdem ist $\hat{R} \cap X = Z(\mathcal{A}_\Omega)$ und Ω ist wesentlich für $Z(\mathcal{A}_\Omega)$ nach Voraussetzung. Zu zeigen bleibt die Basis-Ring-Eigenschaft $\hat{R}$. Die Ringeigenschaft ist klar. Sei nun $A \subseteq \hat{X}$ abgeschlossen und $x \notin A$. Es gibt eine offene Menge $U_x \subseteq \underline{U}(x)$ mit $\overline{U_x} \cap A = \emptyset$ und $\overline{U_x} - U_x = \delta U_x \subseteq \hat{X} - \Omega$. Dann ist $B = U_x \cap \Omega$, $D = \hat{X} - U_x \cap \Omega$ eine Zerlegung von Ω in offen-abgeschlossene Unterräume. Diese sind vollständig separiert in Ω und damit auch in $\hat{X}$, d.h. $\overline{B} \cap \overline{D} = \emptyset$. Es ist $x \notin \overline{A} = A$ und wegen $\overline{D} = \overline{\hat{X} - U_x \cap \Omega} \subseteq \overline{\hat{X} - U_x} = \hat{X} - U_x$ auch $x \notin \overline{D}$ und $\overline{B} \cap A = \emptyset$ wegen $\overline{B} = \overline{U_x \cap \Omega} \subseteq \overline{U_x}$, $\overline{U_x} \cap A = \emptyset$. Daraus folgt $\overline{U_x} \cap \overline{D \cup A} = \emptyset$. Es gibt offene Mengen O_1, O_2 mit $\overline{O_1} \cap \overline{O_2} = \emptyset$

und $\overline{B \cup \{x\}} \in O_1$, $\overline{D \cup A} \in O_2$ und eine stetige Funktion $h \in C(\hat{X}, [0, 1])$ mit $h[\overline{O_1}] \subseteq \{1\}$, $h[\overline{O_2}] \subseteq \{0\}$. Dann ist $\hat{X}(h) \in \hat{R}$, $A \subseteq Z(h)$, $x \notin Z(h)$. qed

VI.16. Satz :

Sei $(\hat{X}, \hat{X})$ Kompaktifizierung von $(X, \underline{X})$ und M die Menge der Multiplumpunkte von $\hat{X}$. Ist M in einer Teilmenge $\Omega \subseteq \hat{X} - X$ enthalten, die abgeschlossen und totalunzusammenhängend ist; dann ist $\hat{X}$ Wallman-Z-Kompaktifizierung von X .

Beweis: Gemäß VI.9. bleibt zu zeigen, daß M (und damit auch Ω) wesentlich ist. Seien f, g fortsetzbare Funktionen und $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$. Dann gilt $\overline{Z(f)}^{\beta(X)} \cap \overline{Z(g)}^{\beta(X)} = \emptyset$ und wegen $i_\beta[\overline{Z(f)}^{\beta(X)}] = \overline{Z(f)}^{\hat{X}}$ (entsprechend für g) folgt $\overline{Z(f)}^{\hat{X}} \cap \overline{Z(g)}^{\hat{X}} \cap M \neq \emptyset$, falls $\overline{Z(f)}^{\hat{X}} \cap \overline{Z(g)}^{\hat{X}} \neq \emptyset$. qed

VI.17. Satz :

Sei $(\hat{X}, \hat{X})$ Kompaktifizierung von $(X, \underline{X})$. Ist M in einer Teilmenge $\Omega \subseteq \hat{X} - X$ enthalten, die normal und nulldimensional in $\hat{X}$ eingebettet ist; dann ist $\hat{X}$ Wallman-Z-Kompaktifizierung von X .

Beweis: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

VI. 18. Satz :

Der $\hat{R}$ ein Basis-Ring der abgeschlossenen Mengen der Kompaktifizierung $(\hat{X}, \hat{X})$ von $(X, \underline{X})$. Sind alle Ränder von Elementen aus $\hat{R}$ in X enthalten und ist X topologisch

vollständig ^{*}), dann ist $\hat{X}$ Wallman-Z-Kompaktifizierung von X .

Beweis: Nach VI.13. gilt $\hat{X} = \mathcal{M}_0(X, \mathbb{R})$ für $\mathbb{R} = \hat{\mathbb{R}} \cap X$. Sei $\bar{R} \in \hat{\mathbb{R}}$, dann ist $\delta \bar{R} \subseteq X$ und für $R = \bar{R} \cap X$ auch $\delta \bar{R} \subseteq X$. $\bar{R} \cap \hat{X} - X$ ist eine offen-abgeschlossene Teilmenge von $\hat{X} - X$. Sei $0 \in \hat{X}$ mit $\bar{R} \subseteq 0$ und $\hat{X} - X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, A_i abgeschlossen in $\hat{X}$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ gibt es eine stetige Funktion $g_i : \hat{X} \rightarrow [0, 1]$ mit $g_i[\bar{R}] \subseteq \{0\}$, $g_i[\hat{X} - \bar{R} \cap A_i \cup \hat{X} - 0] \subseteq \{1\}$. Dann folgt $\bar{R} \subseteq Z(g_i) \subseteq 0$ und $Z(g_i) \cap A_i = \bar{R} \cap A_i$. Setze $Z(R, 0) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Z(g_i)$, $Z(R, 0)$ ist Nullmenge mit $\bar{R} \subseteq Z(R, 0) \subseteq 0$. Außerdem gilt $Z(R, 0) \cap \hat{X} - X = \bar{R} \cap \hat{X} - X$. Wir weisen für die Menge der $\overline{Z(R, 0) \cap \hat{X}}$ die endliche Durchschnittseigenschaft bezüglich X nach. Sei $Z \in \overline{Z(R_1, 0_1) \cap \hat{X}} \dots \overline{Z(R_n, 0_n) \cap \hat{X}} \cap \hat{X} - X = \bar{R}_1 \cap \dots \cap \bar{R}_n \cap \hat{X} - X$, also $R_1 \cap \dots \cap R_n \neq \emptyset$ und damit auch $Z(R_1, 0_1) \cap \hat{X} \dots \cap Z(R_n, 0_n) \cap \hat{X} \neq \emptyset$. q.e.d.

VI.19. Korollar :

Die Freudenthal-Kompaktifizierung eines topologisch vollständigen rim-kompakten Raumes ist Wallman-Z-Kompaktifizierung.

Beweis: Beachte VI.18.. q.e.d.

VI.20. Korollar :

Die Freudenthal-Kompaktifizierung eines lokal-kompakten rim-kompakten Raumes ist Wallman-Z-Kompaktifizierung.

Beweis: Beachte VI.17.. q.e.d.

^{*} im Sinne von E. Čech

- C) Wallman and Z -compactifications.
- Lukè Math. J. 35, 269 - 275 .
- J.F. Steiner: Wallman spaces and compactifications. Fund. Math. 61, 295 - 304 .
- 1969 L.A. Alc & H.L. Shapiro: Z -realcompactifications and normal bases. J. Aust. Math. Soc. 9, 489 - 495 .
- J. Zeme: A note on wallman spaces. Proc. Am. Math. Soc. 22, 141 - 144 .
- 1970 S.A. Naimpally & B.D. Warrack: Proximity spaces. Cambridge.
- C.E. Biles: Wallman-type compactifications. Proc. Am. Math. Soc. 25, 363 - 368 .
- S. Willard: General topology. Reading.
- 1971 D. Harris: The Wallman compactification as a functor. Gen. Top. Appl. 1, 273 - 281 .
- 1972 G. Preuß: Allgemeine Topologie. Berlin-Heidelberg-New York.
- 1973 A.K. Misra: Some regular Wallman BX. Indag. Math. 35, 237 - 242 .
- D.W. Hajek: A characterization of T_3 -spaces. Ind. Univ. Math. J. 23, 23 - 25 .
- M.S. Gagrut & S.A. Naimpally: Wallman compactifications and Wallman realcompactifications. J. Aust. Math. Soc. 15, 417 - 427 .
- 1974 L.R. Sapiro: Reduction of the main problem on compactifications of Wallman type. Sov. Math. Dokl. 15, 1020 - 1023 .
- D.W. Hajek: A note on Wallman extendible functions. Proc. Am. Math. Soc. 44, 505 - 506 .
- J. Schröder: π i und extremer Mono in T_{2a} . Arch. Math. 25, 561 - 565 .
- J. Nagata: Modern general topology. Amsterdam-Groningen.

H.L. Bentley & S.A. Naimpally: Wallman T_1 -compactifications as epireflections. Gen. Top. Appl. 4, 29 - 41 .

1975 W.N. Hunsaker & S.A. Naimpally: Hausdorff compactifications as epireflections. Canad. Math. Bull. 17, 675 - 677 .

Lebenslauf

Ich wurde am 19.7.1950 als Sohn des Werkmeisters Artur Schröder (* 25.2.1902) und seiner Ehefrau, der Büroangestellten Ingeborg Schröder, geb. Wach (* 23.5.1925), in Berlin-Tempelhof geboren. Ich besuchte 6 Jahre die I. Grundschule Tempelhofs und anschließend 7 Jahre das Askanische Gymnasium in Tempelhof. Seit dem 24.4.1970 studiere ich an der Freien Universität in Berlin Mathematik mit dem Nebenfach Physik. Die wichtigsten Lehrer in meinem Leben waren meine Eltern. Ihnen sei an dieser Stelle für ihre unerschöpfliche Liebe und Geduld gedankt. Vom größten fachlichen und persönlichen Einfluß während meiner Studienzeit war Herr Prof. Dr. G. Kreuß. Im 3. und 4. Semester hatte ich Gelegenheit, seine sorgfältig ausgearbeiteten Topologie I und Topologie II Vorlesungen zu hören und begann im 4. Semester mit eigenen topologischen Arbeiten (s. J. Schröder (1974)). Ich belegte unter anderem Vorlesungen und Seminare bei Lenz, Ringel, Pachale, Hofmeister, Töpfer, Faehling, Murty in Mathematik und Scheer, Hüfner, Theis, Honerjäger in Physik. In den letzten beiden Jahren hatte ich Gelegenheit, als studentische Hilfskraft didaktische Erfahrungen im Leiten von Übungsgruppen zu gewinnen. Seit Gründung bin ich Mitglied des Forschungsprojektschwerpunkts 'Kategorielle Topologie'. Die vorliegende Arbeit wurde im Rahmen dieses Projekts angefertigt. Über Ergebnisse wird auf dem II. Symposium über Kategorielle Topologie in Kapstadt (Republik von Südafrika) und auf dem IV. Symposium über Allgemeine Topologie und ihre Beziehungen zur modernen Analysis und Algebra in Prag (Sozialistische Republik Tschechoslowakei) vorgetragen werden.

B. Ladewig - Dissertationsdruck - 1 Berlin 12 - Pestalozzistraße 106
Tel.: 3128885 - 3138198